Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : seuils, modèles et études de fonctions

Fonction logarithme népérien — Terminale spé maths

Exercices

Méthode

On utilise les propriétés algébriques du logarithme pour résoudre équations, inéquations et **seuils**, on dérive des expressions contenant $\ln u$, et on mène une étude complète avec **croissances comparées**.

Exercice 1 – Simplification d'expressions

Simplifier :

a) $A = \ln 8 - 3\ln 2$

b) $B = \ln\left(\mathrm{e}^3\right) + \ln\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

c) $C = \ln\left(\sqrt{45}\right) - \dfrac{1}{2}\ln 5$

Exercice 2 – Équation logarithmique

Résoudre $\ln(x+3) + \ln(x-1) = \ln 5$.

Exercice 3 – Inéquation logarithmique

Résoudre $\ln(2x-1) \leq \ln(x+4)$.

Exercice 4 – Seuil avec logarithme

Déterminer le plus petit entier n tel que $0{,}9^n < 0{,}001$.

Exercice 5 – Dérivée avec logarithme

Dériver :

a) $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)$

b) $g(x) = x\ln x$ sur $]0\,;+\infty[$

c) $h(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$

Exercice 6 – Étude de x ln x

Étudier $f(x) = x\ln x - x$ sur $]0\,;+\infty[$: variations, limites, extremum.

Exercice 7 – Croissances comparées

Calculer $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}$, $\lim_{x\to+\infty}(x-\ln x)$ et $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Inégalité ln x ≤ x−1

Démontrer que $\ln x \leq x - 1$ pour tout $x > 0$, et en déduire $\ln(1 + u) \leq u$ pour $u > -1$.

Exercice 9 – Modèle de décroissance

Un médicament s'élimine selon $C(t) = 12 \times 0{,}85^{t}$ (mg/L, t en heures). Au bout de combien de temps la concentration passe-t-elle sous 2 mg/L ?

Exercice 10 – Échelle logarithmique

Le niveau sonore vaut $L = 10 \log \frac{I}{I_0}$ dB, avec $I_0 = 10^{-12}$ W/m².

a) Calculer L pour $I = 10^{-6}$ W/m².

b) De combien augmente L si l'intensité **double** ?

Exercice 11 – Équation avec changement de variable

Résoudre $(\ln x)^2 - 3 \ln x + 2 = 0$.

Exercice 12 – Étude avec asymptote

Soit $f(x) = x - \ln x$ sur $]0\,;+\infty[$. Étudier les variations, les limites, et montrer que f admet un minimum.

Exercice 13 – Comparaison de puissances

Comparer 2^{300} et 3^{200} sans calculatrice.

Exercice 14 – Intérêts composés et seuil

Un capital placé à 4 % par an. En combien d'années double-t-il ? Et triple-t-il ?

Exercice 15 – Synthèse : étude complète type bac

Soit $f(x) = 2 \ln x - x + 3$ sur $]0\,;+\infty[$.

a) Étudier les variations et les limites.

b) Montrer que $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions.

c) Encadrer la plus grande à 0,1 près.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).