

**Plaquette 5 - Problèmes de synthèse :
seuils, modèles et études de fonctions****Fonction logarithme népérien — Terminale spé maths**

Exercices

Méthode

On utilise les propriétés algébriques du logarithme pour résoudre équations, inéquations et **seuils**, on dérive des expressions contenant $\ln u$, et on mène une étude complète avec **croissances comparées**.

Exercice 1 - Simplification d'expressions

Simplifier :

a) $A = \ln 8 - 3 \ln 2$

b) $B = \ln(e^3) + \ln \frac{1}{e}$

c) $C = \ln(\sqrt{45}) - \frac{1}{2} \ln 5$

Exercice 2 - Équation logarithmique

Résoudre $\ln(x+3) + \ln(x-1) = \ln 5$.

Exercice 3 - Inéquation logarithmique

Résoudre $\ln(2x-1) \leq \ln(x+4)$.

Exercice 4 - Seuil avec logarithme

Déterminer le plus petit entier n tel que $0,9^n < 0,001$.

Exercice 5 - Dérivée avec logarithme

Dériver :

a) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

b) $g(x) = x \ln x$ sur $]0; +\infty[$

c) $h(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur $]0; +\infty[$

Exercice 6 - Étude de $x \ln x$

Étudier $f(x) = x \ln x - x$ sur $]0; +\infty[$: variations, limites, extremum.

Exercice 7 - Croissances comparées

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x$.

Exercice 8 - Inégalité $\ln x \leq x - 1$

Démontrer que $\ln x \leq x - 1$ pour tout $x > 0$, et en déduire $\ln(1 + u) \leq u$ pour $u > -1$.

Exercice 9 - Modèle de décroissance

Un médicament s'élimine selon $C(t) = 12 \times 0,85^t$ (mg/L, t en heures). Au bout de combien de temps la concentration passe-t-elle sous 2 mg/L ?

Exercice 10 - Échelle logarithmique

Le niveau sonore vaut $L = 10 \log \frac{I}{I_0}$ dB, avec $I_0 = 10^{-12}$ W/m².

- a) Calculer L pour $I = 10^{-6}$ W/m².
- b) De combien augmente L si l'intensité **double** ?

Exercice 11 - Équation avec changement de variable

Résoudre $(\ln x)^2 - 3 \ln x + 2 = 0$.

Exercice 12 - Étude avec asymptote

Soit $f(x) = x - \ln x$ sur $]0; +\infty[$. Étudier les variations, les limites, et montrer que f admet un minimum.

Exercice 13 - Comparaison de puissances

Comparer 2^{300} et 3^{200} sans calculatrice.

Exercice 14 - Intérêts composés et seuil

Un capital placé à 4 % par an. En combien d'années double-t-il ? Et triple-t-il ?

Exercice 15 - Synthèse : étude complète type bac

Soit $f(x) = 2 \ln x - x + 3$ sur $]0; +\infty[$.

- a) Étudier les variations et les limites.
- b) Montrer que $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions.
- c) Encadrer la plus grande à 0,1 près.