

Plaquette 4 - Courbes, modèles — type bac

Fonctions trigonométriques — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Fonction sinusoïdale $f(t) = A \sin(\omega t + \varphi) + B$ ($A > 0$, $\omega > 0$) :

— valeurs comprises entre $B - A$ et $B + A$;

— période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, fréquence $\frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$.

$$A = \frac{\max - \min}{2} \quad B = \frac{\max + \min}{2} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Dérivée : $f'(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$; la vitesse de variation est maximale quand f passe par sa valeur moyenne.

Résoudre $\cos X \geq c$ **ou** $\sin X \geq c$: on résout d'abord l'équation sur le cercle, on choisit le bon **arc**, puis on revient à t en tenant compte de l'intervalle parcouru par $X = \omega t + \varphi$.

Oscillations amorties : $e^{-kt} \cos(\omega t)$ est encadrée par $\pm e^{-kt}$, qui tendent vers 0 (théorème des gendarmes).

Suites : $u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{p}\right)$ est périodique de période $2p$; une suite périodique non constante n'a **pas** de limite.

Correction de l'exercice 1 - Identifier une sinusoïde

a) **Lecture** : maximum 3 (en $\frac{\pi}{4}$), minimum -1 (en $\frac{3\pi}{4}$). La courbe se reproduit à l'identique tous les π : période $T = \pi$.

b) On applique

$$A = \frac{\max - \min}{2} \quad B = \frac{\max + \min}{2} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$- A = \frac{3 - (-1)}{2} = 2 ; B = \frac{3 + (-1)}{2} = 1 ; \omega = \frac{2\pi}{\pi} = 2.$$

— Donc $f(x) = 2 \sin(2x) + 1$.

c) $f(0) = 2 \sin 0 + 1 = 1$ ✓ (la courbe coupe l'axe des ordonnées en 1).

$f'(0) = 4 \cos 0 = 4 > 0$: la courbe **monte** en 0 ✓ — avec $A < 0$, elle descendrait.

Réponse. $A = 2$, $B = 1$, $\omega = 2$: $f(x) = 2 \sin(2x) + 1$.

Correction de l'exercice 2 - La grande roue

a) $-1 \leq \cos\left(\frac{\pi t}{15}\right) \leq 1$, donc $5 \leq h(t) \leq 45$: hauteur minimale 5 m (en bas, à $t = 0$), maximale 45 m. Période : $T = \frac{2\pi}{\pi/15} = 30$ minutes.

b) On résout $h(t) \geq 35$ sur $[0; 30]$:

$$-20 \cos\left(\frac{\pi t}{15}\right) \geq 10 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{15}\right) \leq -\frac{1}{2}$$

$$- \text{ Avec } X = \frac{\pi t}{15} \in [0; 2\pi] : \cos X \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow X \in \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right].$$

— Soit $t \in [10; 20]$: 10 **minutes** par tour.

c) $h'(t) = 20 \times \frac{\pi}{15} \sin\left(\frac{\pi t}{15}\right) = \frac{4\pi}{3} \sin\left(\frac{\pi t}{15}\right)$, maximale pour $\frac{\pi t}{15} = \frac{\pi}{2}$, soit $t = 7,5$ min, à mi-hauteur (25 m) : elle vaut $\frac{4\pi}{3} \approx 4,2$ m/min.

Réponse. a) 5 m, 45 m, 30 min · b) 10 min par tour · c) à $t = 7,5$ min.

Correction de l'exercice 3 - Température sur une journée

a) T est minimale quand $\cos\left(\frac{\pi(t-4)}{12}\right) = 1$, soit $t = 4$: $T(4) = 10$ °C à **4 h**.

Maximale quand le cosinus vaut -1 , soit $\frac{\pi(t-4)}{12} = \pi$, $t = 16$: $T(16) = 20$ °C à **16 h**.

b) $T(t) > 17,5 \Leftrightarrow -5 \cos X > 2,5 \Leftrightarrow \cos X < -\frac{1}{2}$, avec $X = \frac{\pi(t-4)}{12}$.

$$\cos X < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow X \in \left] \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} \right[$$

(pour $t \in [0; 24]$, X parcourt $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right]$, qui ne contient qu'un seul de ces arcs).

— $\frac{2\pi}{3} < \frac{\pi(t-4)}{12} < \frac{4\pi}{3} \Leftrightarrow 8 < t-4 < 16 \Leftrightarrow 12 < t < 20$.

Il fait plus de 17,5 °C entre **12 h et 20 h**.

Réponse. a) 10 °C à 4 h, 20 °C à 16 h · b) entre 12 h et 20 h.

Correction de l'exercice 4 - Une courbe entre deux droites

a) $-1 \leq \sin x \leq 1$, donc en ajoutant x :

$$x - 1 \leq x + \sin x \leq x + 1$$

b) $f(x) = 1 + \cos x \geq 0$, nulle seulement en des points isolés ($\cos x = -1$, soit $x = \pi + 2k\pi$) : f est **strictement croissante**.

— Tangentes horizontales aux points d'abscisse $\pi + 2k\pi$, où $f(x) = x$: par exemple $(\pi; \pi)$ et $(3\pi; 3\pi)$.

— Ce ne sont **pas** des extremums : la fonction continue de croître (points d'inflexion à tangente horizontale).

c) La courbe touche $y = x + 1$ quand $\sin x = 1$, soit $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; elle touche $y = x - 1$ quand $\sin x = -1$, soit $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$.

Réponse. Courbe entre $y = x - 1$ et $y = x + 1$; f croissante, tangentes horizontales en $\pi + 2k\pi$.

Correction de l'exercice 5 - Oscillation amortie

a) $-1 \leq \cos t \leq 1$, et l'on multiplie par $e^{-0,2t} > 0$ (le sens est conservé) :

$$-e^{-0,2t} \leq e^{-0,2t} \cos t \leq e^{-0,2t}$$

b) $e^{-0,2t} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$, et de même pour son opposé. D'après le **théorème des gendarmes**, $f(t) \rightarrow 0$.

c) $f(t) = e^{-0,2t} \Leftrightarrow \cos t = 1 \Leftrightarrow t = 2k\pi$ (k entier naturel).

— La courbe touche son enveloppe supérieure en $t = 0, 2\pi, 4\pi \dots$ et l'enveloppe inférieure en $t = \pi, 3\pi \dots$

— **Physique** : c'est le mouvement d'un ressort freiné par des frottements, ou la tension d'un circuit RLC ; l'amplitude décroît exponentiellement.

Réponse. f est encadrée par $\pm e^{-0,2t}$, donc $f(t) \rightarrow 0$; contact en $t = 2k\pi$.

Correction de l'exercice 6 - Nombre de solutions d'une équation

a) Le sinus est continu ; on applique le **corollaire du TVI** sur chaque intervalle de monotonie :

- sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, il croît strictement de 0 à 1, et $0,3 \in [0; 1]$: **une** solution α ;
- sur $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, il décroît strictement de 1 à -1 : **une** solution β ;
- sur $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$, il prend des valeurs négatives : aucune.

Il y a **deux** solutions.

b) $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha = 0,3$ et $\pi - \alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$: donc

$$\beta = \pi - \alpha$$

- À la calculatrice, $\alpha \approx 0,305$ et $\beta \approx 2,837$.
- **Figure** : la droite $y = 0,3$ coupe l'arche positive du sinus en deux points symétriques par rapport à la droite $x = \frac{\pi}{2}$.

Réponse. Deux solutions : $\alpha \approx 0,305$ et $\pi - \alpha \approx 2,837$.

Correction de l'exercice 7 - Portée d'un projectile

a) $R'(\theta) = 80 \cos(2\theta)$. Pour $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $2\theta \in [0; \pi]$ et

$$\cos(2\theta) = 0 \Leftrightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

R croît sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ et décroît ensuite : la portée est maximale pour $\theta = 45^\circ$, avec $R = 40$ m.

b) $40 \sin(2\theta) = 30 \Leftrightarrow \sin(2\theta) = 0,75$. Sur $[0; \pi]$, cette équation a deux solutions X et $\pi - X$, avec $X \approx 0,848$.

- $\theta_1 = \frac{X}{2} \approx 0,424$ rad ($\approx 24,3^\circ$) et $\theta_2 = \frac{\pi - X}{2} = \frac{\pi}{2} - \theta_1 \approx 1,147$ rad ($\approx 65,7^\circ$).
- **Remarque** : les deux angles sont **complémentaires** ($\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$) — un tir tendu et un tir en cloche atteignent la même cible.

Réponse. a) 45° , 40 m · b) $\approx 24,3^\circ$ et $\approx 65,7^\circ$, angles complémentaires.

Correction de l'exercice 8 - Période d'un pendule

a) $\theta'(t) = -\theta_0 \omega \sin(\omega t)$, puis $\theta''(t) = -\theta_0 \omega^2 \cos(\omega t) = -\omega^2 \theta(t)$, et $\omega^2 = \frac{g}{L}$ ✓

b) La période d'un cosinus de pulsation ω est

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

— Pour $L = 1$: $T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{9,81}} \approx 2\pi \times 0,319 \approx 2,006$ s.

c) $T = 2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{L}{g}} = \frac{1}{\pi} \Leftrightarrow L = \frac{g}{\pi^2} \approx \frac{9,81}{9,870} \approx 0,994$ m.

- **Culture** : c'est le « pendule qui bat la seconde » (une demi-période par seconde) ; sa longueur voisine de 1 m a failli servir à définir le mètre.
- **Remarque** : la période ne dépend **pas** de l'amplitude θ_0 (pour de petits angles).

Réponse. b) $T \approx 2,006 \text{ s}$ · c) $L = \frac{g}{\pi^2} \approx 0,994 \text{ m}$.

Correction de l'exercice 9 - Une suite périodique

a) Avec les valeurs remarquables :

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

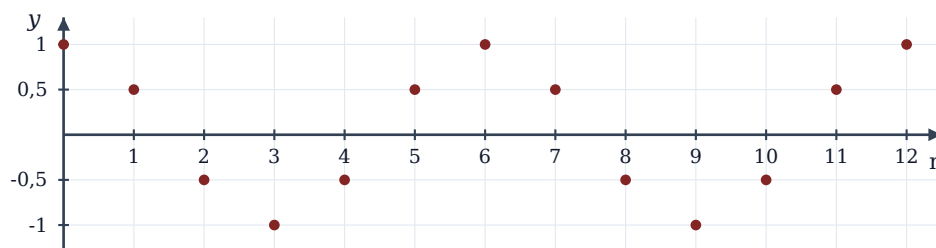
b) Par 2π -périodicité du cosinus :

$$u_{n+6} = \cos\left(\frac{n\pi}{3} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) = u_n$$

c) **Non** : les termes de rang $6k$ valent tous 1 et ceux de rang $6k + 3$ valent tous -1 . Si la suite convergeait vers ℓ , ces deux sous-suites devraient aussi tendre vers ℓ : on aurait $\ell = 1$ et $\ell = -1$, impossible.

— **À retenir** : une suite périodique **non constante** ne converge jamais.

Réponse. Valeurs $1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$; période 6 ; pas de limite.



Les termes se répètent tous les 6 rangs

Correction de l'exercice 10 - Étude d'une oscillation amortie

a) Produit de e^{-x} (dérivée $-e^{-x}$) et de $\sin x$ (dérivée $\cos x$) :

$$f'(x) = -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x = e^{-x}(\cos x - \sin x)$$

b) $e^{-x} > 0$: le signe est celui de $\cos x - \sin x$. Sur $[0; \pi]$, $\cos x = \sin x$ seulement en $\frac{\pi}{4}$; avant, $\cos x > \sin x$, après, $\cos x < \sin x$.

x	0		$\frac{\pi}{4}$		π
$f'(x)$		+	0	-	
f	0	croissante	$\approx 0,322$	décroissante	0

— **Maximum** : $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{-\pi/4} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,456 \times 0,707 \approx 0,322$.

— **Remarque** : sans l'amortissement, le maximum serait en $\frac{\pi}{2}$; l'exponentielle décroissante l'avance à $\frac{\pi}{4}$.

Réponse. Croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, décroissante ensuite ; maximum $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\pi/4} \approx 0,322$.

Correction de l'exercice 11 - Durée du jour

a) $-1 \leq \sin(\dots) \leq 1$, donc $8 \leq D(t) \leq 16$: le jour dure au plus 16 h et au moins 8 h.

Le maximum est atteint quand le sinus vaut 1 :

$$\frac{2\pi(t-80)}{365} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t = 80 + \frac{365}{4} \approx 171$$

soit vers le **20 juin** (solstice d'été).

b) $D(t) > 14 \Leftrightarrow \sin X > \frac{1}{2}$ avec $X = \frac{2\pi(t-80)}{365}$, soit $X \in \left]\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right[$.

$$- \frac{2\pi(t-80)}{365} = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow t = 80 + \frac{365}{12} \approx 110,4 ;$$

$$- \frac{2\pi(t-80)}{365} = \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow t = 80 + \frac{5 \times 365}{12} \approx 232,1.$$

Du jour 111 au jour 232, soit 122 **jours** (un tiers de l'année).

Réponse. a) 16 h vers le jour 171, 8 h au minimum · b) environ 122 jours.

Correction de l'exercice 12 - Deux signaux déphasés

a) $u_2(t) = u_1\left(t - \frac{\pi}{3}\right)$: la courbe de u_2 est celle de u_1 **décalée de $\frac{\pi}{3}$ vers la droite**. Le signal u_2 est **en retard** de $\frac{\pi}{3}$ sur u_1 .

b) On résout $\sin t = \sin\left(t - \frac{\pi}{3}\right)$. Deux sinus sont égaux si les angles sont égaux ou « supplémentaires » :

$$\sin a = \sin b \Leftrightarrow a = b + 2k\pi \text{ ou } a = \pi - b + 2k\pi$$

$$- t = t - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ est impossible } \left(\frac{\pi}{3} \text{ n'est pas un multiple de } 2\pi\right) ;$$

$$- t = \pi - t + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow 2t = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow t = \frac{2\pi}{3} + k\pi.$$

$$\text{Dans } [0; 2\pi] : t = \frac{2\pi}{3} \text{ et } t = \frac{5\pi}{3}.$$

$$- \textbf{Contrôle} : \sin \frac{2\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \checkmark$$

Réponse. Décalage de $\frac{\pi}{3}$ vers la droite ; égalité en $t = \frac{2\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$.

Correction de l'exercice 13 - Mouvement circulaire

a) On dérive chaque coordonnée :

$$\vec{v}(t) = (-\sin t; \cos t) \quad |\vec{v}(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$$

La vitesse a une norme **constante** égale à 1 : le mouvement est **uniforme**.

b) **Produit scalaire** :

$$- \overrightarrow{OM} \cdot \vec{v} = \cos t \times (-\sin t) + \sin t \times \cos t = 0.$$

— Les deux vecteurs sont **orthogonaux** : la vitesse est **tangente** au cercle.

— **Interprétation** : le vecteur vitesse est obtenu en faisant tourner $\overrightarrow{OM}$ d'un quart de tour ; on retrouve $\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin t$ et $\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos t$.

— **Accélération** : $\vec{a}(t) = (-\cos t; -\sin t) = -\overrightarrow{OM}$, dirigée vers le centre.

Réponse. $\vec{v} = (-\sin t; \cos t)$, de norme 1, orthogonal à $\overrightarrow{OM}$: vitesse tangente.

Correction de l'exercice 14 - Étude complète type bac

a) $2 + \sin x \geq 1 > 0$: f est définie et dérivable. Formule du quotient :

$$f'(x) = \frac{-\sin x(2 + \sin x) - \cos x \times \cos x}{(2 + \sin x)^2} = \frac{-2 \sin x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{(2 + \sin x)^2} = -\frac{2 \sin x + 1}{(2 + \sin x)^2}$$

b) $f(x) > 0 \Leftrightarrow \sin x < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left] \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \right[$.

x	0		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
$f(x)$		-	0	+	0	-	
f	$\frac{1}{2}$	décroissante	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	croissante	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	décroissante	$\frac{1}{2}$

c) $f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{-\sqrt{3}/2}{3/2} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \approx -0,577$: **minimum** ; $f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,577$: **maximum** (supérieur à $f(0) = \frac{1}{2}$).

Réponse. Min $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ en $\frac{7\pi}{6}$, max $\frac{\sqrt{3}}{3}$ en $\frac{11\pi}{6}$.

Correction de l'exercice 15 - Hauteur du soleil

a) h est maximale quand le sinus vaut 1 : $\frac{\pi(t-6)}{12} = \frac{\pi}{2}$, soit $t = 12$ h. Hauteur : 60° .

b) Avec $X = \frac{\pi(t-6)}{12} \in [0; \pi]$:

$$h(t) \geq 30 \Leftrightarrow \sin X \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow X \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right]$$

— Soit $\frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi(t-6)}{12} \leq \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow 2 \leq t-6 \leq 10 \Leftrightarrow 8 \leq t \leq 16$.

— Le soleil est à plus de 30° de **8 h à 16 h**.

c) $h'(t) = 60 \times \frac{\pi}{12} \cos\left(\frac{\pi(t-6)}{12}\right) = 5\pi \cos\left(\frac{\pi(t-6)}{12}\right)$, maximale pour $t = 6$: le soleil monte le plus vite **au lever**, à $5\pi \approx 15,7^\circ$ par heure.

Réponse. a) 60° à midi · b) de 8 h à 16 h · c) au lever, 5π degrés par heure.