

Plaquette 2 - Dérivées des fonctions trigonométriques

Fonctions trigonométriques — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Dérivées de référence (sur $\mathbb{R}$) :

$$\sin'(x) = \cos x \quad \cos'(x) = -\sin x$$

Composées :

$$[\sin(u)]' = u' \cos(u) \quad [\cos(u)]' = -u' \sin(u)$$

En particulier $[\sin(ax + b)]' = a \cos(ax + b)$ et $[\cos(ax + b)]' = -a \sin(ax + b)$.

Limites remarquables (nombres dérivés en 0) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

Périodicité et parité : $\sin$ et $\cos$ sont 2π -périodiques ; $\cos$ est paire, $\sin$ impaire. La dérivée d'une fonction T -périodique est T -périodique ; la dérivée d'une fonction paire est impaire.

Dérivée seconde : $\sin'' = -\sin$ et $\cos'' = -\cos$. Plus généralement, $y = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ vérifie $y'' = -\omega^2 y$: c'est l'équation des **oscillations**.

Rappels : $(uv)' = u'v + uv'$; $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$; $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.

Correction de l'exercice 1 - Premières dérivées

On utilise les dérivées de référence

$$\sin' = \cos \quad \cos' = -\sin$$

et la formule du produit $(uv)' = u'v + uv'$.

a) $f(x) = 3 \cos x - 2 \times (-\sin x) = 3 \cos x + 2 \sin x$.

b) $g'(x) = 1 \times \sin x + x \times \cos x = \sin x + x \cos x$.

c) $h'(x) = 2x \cos x + x^2 \times (-\sin x) = 2x \cos x - x^2 \sin x$.

— **Piège en a)** : le signe « moins » de $\cos' = -\sin$ se combine avec celui de $-2 \cos x$ pour donner $+2 \sin x$.

— **Contrôle en b)** : $g'(0) = 0$; la courbe de g a une tangente horizontale en 0, cohérent avec $g(x) = x \sin x \geq 0$ près de 0.

Réponse. a) $3 \cos x + 2 \sin x$ · b) $\sin x + x \cos x$ · c) $2x \cos x - x^2 \sin x$.

Correction de l'exercice 2 - Composées affines

Pour une fonction intérieure **affine** $ax + b$:

$$[\sin(ax + b)]' = a \cos(ax + b) \quad [\cos(ax + b)]' = -a \sin(ax + b)$$

a) $a = 2$: $f(x) = 2 \cos(2x)$.

b) $a = 3$: $g'(x) = -3 \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$.

c) La variable est t , et $a = \omega$: $u'(t) = 5\omega \cos(\omega t + \varphi)$.

- **Interprétation de c)** : dériver un signal sinusoïdal multiplie son amplitude par la **pulsation** ω et le décale d'un quart de période ; un signal rapide a une dérivée de grande amplitude.
- **Piège** : écrire $f(x) = \cos(2x)$, en oubliant le facteur 2.

Réponse. a) $2 \cos(2x)$ · b) $-3 \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ · c) $5\omega \cos(\omega t + \varphi)$.

Correction de l'exercice 3 - Puissances de sinus et cosinus

On applique

$$(u^n)' = n u' u^{n-1}$$

- a) $u = \sin x$, $u' = \cos x$: $f(x) = 2 \cos x \sin x$.
 b) $u = \cos x$, $u' = -\sin x$: $g'(x) = 3 \times (-\sin x) \cos^2 x = -3 \sin x \cos^2 x$.
 c) De même, $(\cos^2 x)' = 2 \times (-\sin x) \cos x = -2 \sin x \cos x$. Donc

$$h'(x) = 2 \sin x \cos x - 2 \sin x \cos x = 0$$

- **Commentaire** : h a une dérivée nulle sur $\mathbb{R}$, elle est **constante** ; comme $h(0) = 0 + 1 = 1$, on retrouve la relation fondamentale $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
- **Notation** : $\sin^2 x$ signifie $(\sin x)^2$, et non $\sin(x^2)$.

Réponse. a) $2 \sin x \cos x$ · b) $-3 \sin x \cos^2 x$ · c) $h' = 0$, h est constante égale à 1.

Correction de l'exercice 4 - Un quotient trigonométrique

a) $\cos x \geq -1$, donc $2 + \cos x \geq 1 > 0$: le dénominateur ne s'annule jamais. f est un quotient de fonctions dérivables, dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Avec $u = \sin x$, $u' = \cos x$, $v = 2 + \cos x$, $v' = -\sin x$:

$$f(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{\cos x(2 + \cos x) - \sin x \times (-\sin x)}{(2 + \cos x)^2}$$

- Numérateur : $2 \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x = 2 \cos x + 1$ (relation fondamentale).
- D'où $f(x) = \frac{2 \cos x + 1}{(2 + \cos x)^2}$.
- **Usage** : le signe de f est celui de $2 \cos x + 1$; sur $[0; \pi]$, f croît jusqu'à $\frac{2\pi}{3}$ puis décroît, avec pour maximum $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}/2}{3/2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Réponse. $f(x) = \frac{2 \cos x + 1}{(2 + \cos x)^2}$.

Correction de l'exercice 5 - La tangente au sinus en zéro

a) $\sin 0 = 0$ et $\sin'(0) = \cos 0 = 1$:

$$T: y = 1 \times (x - 0) + 0 = x$$

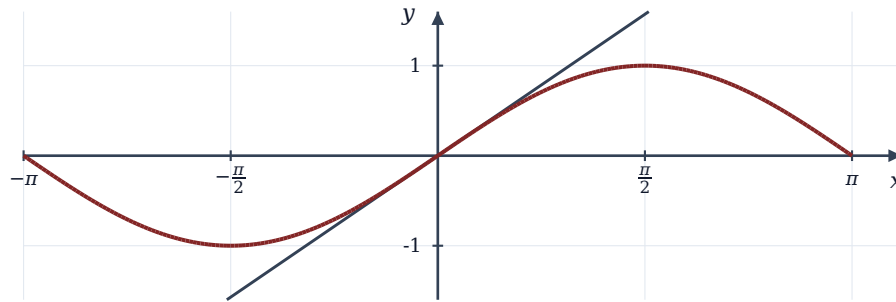
b) $g'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ pour tout x (car $\cos x \leq 1$), et g' ne s'annule qu'en des points isolés ($x = 2k\pi$).

- g est **croissante** sur $[0; +\infty[$, donc $g(x) \geq g(0) = 0$ pour $x \geq 0$.
- Soit $x - \sin x \geq 0$: $\sin x \leq x$.
- **Interprétation** : pour $x \geq 0$, la courbe est **sous** sa tangente ; pour $x \leq 0$, elle est au-dessus (par imparité). La courbe **traverse** sa tangente en O : c'est un point

d'inflexion.

— **Approximation** : pour x petit, $\sin x \approx x$ ($\sin 0,1 \approx 0,0998$).

Réponse. $T: y = x$; $g' = 1 - \cos x \geq 0$, donc $\sin x \leq x$ sur $[0; +\infty[$.



Tangente $y = x$ en O : la courbe la traverse

Correction de l'exercice 6 - La tangente au cosinus

a) $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ et $\cos' \left(\frac{\pi}{2} \right) = -\sin \frac{\pi}{2} = -1$:

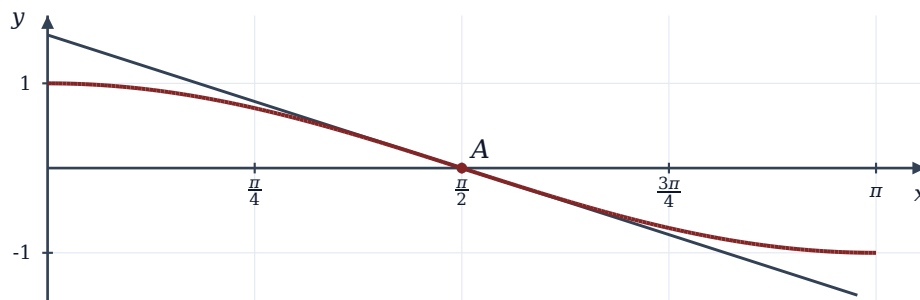
$$T: y = -1 \times \left(x - \frac{\pi}{2} \right) + 0 = -x + \frac{\pi}{2}$$

b) Pour $x = 0$: $y = \frac{\pi}{2} \approx 1,57$. La tangente passe par $\left(0; \frac{\pi}{2} \right)$ et par $A \left(\frac{\pi}{2}; 0 \right)$, avec une pente de -1 .

— **Remarque** : en A , la courbe du cosinus **traverse** sa tangente ($\cos'' = -\cos$ s'annule en changeant de signe) : A est un point d'inflexion.

— **Lien** : la courbe du cosinus est celle du sinus décalée de $\frac{\pi}{2}$ vers la gauche, puisque $\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$.

Réponse. $T: y = -x + \frac{\pi}{2}$, qui coupe l'axe des ordonnées en $\frac{\pi}{2}$.



Tangente $y = -x + \frac{\pi}{2}$ en A

Correction de l'exercice 7 - Deux limites remarquables

a) Si f est dérivable en a :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

— Avec $f = \sin$ et $a = 0$: $\frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} \rightarrow \sin'(0) = \cos 0 = 1$.

— Avec $f = \cos$ et $a = 0$: $\frac{\cos x - \cos 0}{x - 0} \rightarrow \cos'(0) = -\sin 0 = 0$.

b) On fait apparaître la forme précédente :

$$- \frac{\sin(4x)}{x} = 4 \times \frac{\sin(4x)}{4x} ;$$

— avec $X = 4x \rightarrow 0$, $\frac{\sin X}{X} \rightarrow 1$, donc la limite vaut 4.

— **Contrôle numérique** : $\frac{\sin 0,004}{0,001} \approx 3,99999 \checkmark$

Réponse. a) 1 et 0 · b) 4.

Correction de l'exercice 8 - Périodicité d'une fonction et de sa dérivée

a) Pour tout x : $f(x + \pi) = \sin(2x + 2\pi) = \sin(2x) = f(x)$, par 2π -périodicité du sinus.

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta$$

b) $f(x) = 2 \cos(2x)$ et $f(x + \pi) = 2 \cos(2x + 2\pi) = 2 \cos(2x) = f(x) \checkmark$

c) **Lecture** : les sommets et les creux sont en $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$.

Calcul : $f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.

— Dans $[0; 2\pi]$: $x \in \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \right\} \checkmark$

— **Remarque** : la période de $\sin(\omega x)$ est $\frac{2\pi}{\omega}$; ici $\omega = 2$, d'où π .

Réponse. a) $f(x + \pi) = f(x)$ · b) $f(x) = 2 \cos(2x)$ · c) $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 9 - Parité et dérivée

a) Pour tout x : $\cos(-x) = \cos x$ (paire) et $\sin(-x) = -\sin x$ (impaire).

b) La dérivée de $x \mapsto f(-x)$ est $-f'(-x)$ (composée avec $u(x) = -x$, $u' = -1$). En dérivant $f(-x) = f(x)$:

$$-f'(-x) = f'(x) \quad \text{soit} \quad f'(-x) = -f'(x)$$

f est **impaire**.

c) **Avec** $\cos$: $\cos' = -\sin$, qui est bien impaire $\checkmark$

Avec $f(x) = x \sin x$: $f(-x) = (-x) \sin(-x) = x \sin x$, f est paire. Sa dérivée $f'(x) = \sin x + x \cos x$ vérifie $f'(-x) = -\sin x - x \cos x = -f'(x)$: impaire $\checkmark$

— **Conséquence** : la dérivée d'une fonction paire s'annule en 0 (car $f'(0) = -f'(0)$) — la courbe a une tangente horizontale sur l'axe de symétrie.

Réponse. $f(-x) = -f(x)$: la dérivée d'une fonction paire est impaire.

Correction de l'exercice 10 - L'équation des oscillations

a) $\sin'' = (\cos)' = -\sin$ et $\cos'' = (-\sin)' = -\cos$: chaque fonction est **l'opposée** de sa dérivée seconde.

b) $y'(t) = -6 \sin(2t)$, puis $y''(t) = -12 \cos(2t) = -4 \times 3 \cos(2t) = -4y(t) \checkmark$

c) On dérive deux fois, chaque dérivation faisant sortir un facteur ω :

— $y'(t) = -A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t)$;

— $y''(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t) - B\omega^2 \sin(\omega t) = -\omega^2 y(t)$.

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

— **Physique** : c'est l'équation d'un ressort, d'un pendule aux petits angles ou d'un circuit LC ; ses solutions sont des oscillations de **pulsation** ω et de période $\frac{2\pi}{\omega}$.

Réponse. $\sin'' = -\sin$, $\cos'' = -\cos$; $y'' = -\omega^2 y$.

Correction de l'exercice 11 - Vitesse et accélération d'un ressort

a) On dérive deux fois la composée avec $2t$:

$$v(t) = -10 \sin(2t) \quad a(t) = -20 \cos(2t)$$

b) $|v(t)| = 10 \sin(2t) \leq 10$: la vitesse maximale vaut **10 cm/s**, atteinte quand $\sin(2t) = 1$, donc $\cos(2t) = 0$ et $x(t) = 0$ — au **passage par la position d'équilibre**.

c) $a(t) = -20 \cos(2t) = -4 \times 5 \cos(2t) = -4x(t)$.

— **Interprétation** : l'accélération est **proportionnelle** à l'écart à l'équilibre et **de sens opposé** — c'est la force de rappel du ressort (loi de Hooke).

— **Aux extrémités** ($x = \pm 5$), la vitesse est nulle et l'accélération maximale (20 cm/s^2).

Réponse. $v = -10 \sin(2t)$, $a = -20 \cos(2t) = -4x$; vitesse max 10 cm/s en $x = 0$.

Correction de l'exercice 12 - Variations sur un intervalle

a) $f(x) = -\sin x + \frac{1}{2}$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6}$$

(solutions dans $[0; 2\pi]$).

b) $f(x) > 0 \Leftrightarrow \sin x < \frac{1}{2}$, c'est-à-dire sur $\left[0; \frac{\pi}{6}\right[$ et $\left]\frac{5\pi}{6}; 2\pi\right]$.

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		2π
$f(x)$		+	0	−	0	+	
f	1	croissante	$\approx 1,13$	décroissante	$\approx 0,44$	croissante	$1 + \pi$

— $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12} \approx 1,13$ (maximum local) ;

— $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5\pi}{12} \approx 0,44$ (minimum local) ;

— $f(2\pi) = 1 + \pi \approx 4,14$.

Réponse. Croissante, puis décroissante sur $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$, puis croissante.

Correction de l'exercice 13 - Tangentes horizontales

a) $f(x) = \cos x - \sin x$. La tangente est horizontale quand $f'(x) = 0$:

$$\cos x = \sin x$$

— Sur le cercle, ce sont les points dont l'abscisse égale l'ordonnée : ils sont sur la droite $y = x$, en $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{4}$.

b) **Valeurs** :

— $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \approx 1,41$;

— $f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$;

— aux bornes, $f(0) = f(2\pi) = 1$.

Le **maximum** est $\sqrt{2}$ (en $\frac{\pi}{4}$) et le **minimum** $-\sqrt{2}$ (en $\frac{5\pi}{4}$), ce que confirme la figure.

— **Remarque** : $\sqrt{2} > 1$, la somme dépasse chacun des deux termes, qui ne valent jamais 1 en même temps.

Réponse. Tangentes horizontales en $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{4}$; maximum $\sqrt{2}$, minimum $-\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 14 - Deux oublis classiques

a) **Première dérivée** : oubli du facteur u' . Avec $u = 3x$, $u' = 3$:

$$[\sin(3x)]' = 3 \cos(3x)$$

Seconde dérivée : erreur de signe. $\cos' = -\sin$.

b) En 0, la vraie dérivée vaut $3 \cos 0 = 3$. Taux d'accroissement :

$$- \frac{\sin(3 \times 0,01) - \sin 0}{0,01} = \frac{\sin 0,03}{0,01} \approx \frac{0,029996}{0,01} \approx 3,00 \checkmark$$

— La formule de l'élève donnerait $\cos 0 = 1$: trois fois trop peu.

— **Moyen mnémotechnique** : en dérivant, on « tourne d'un quart de tour » sur le cercle, $\sin \rightarrow \cos \rightarrow -\sin \rightarrow -\cos \rightarrow \sin$.

Réponse. $[\sin(3x)]' = 3 \cos(3x)$ et $\cos' = -\sin$.

Correction de l'exercice 15 - Cosinus d'un carré

a) Avec $u(x) = x^2$, $u'(x) = 2x$:

$$[\cos(u)]' = -u' \sin(u) \quad f(x) = -2x \sin(x^2)$$

b) En $a = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$: $a^2 = \frac{\pi}{2}$.

$$- f(a) = \cos \frac{\pi}{2} = 0 ;$$

$$- f(a) = -2\sqrt{\frac{\pi}{2}} \times \sin \frac{\pi}{2} = -2\sqrt{\frac{\pi}{2}} = -\sqrt{2\pi} \approx -2,51.$$

Tangente : $y = -\sqrt{2\pi} \left(x - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$, soit $y = -\sqrt{2\pi} x + \pi$ (car $\sqrt{2\pi} \times \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\pi^2} = \pi$).

— **Remarque** : f n'est **pas** périodique — les oscillations de $\cos(x^2)$ s'accroissent quand x grandit.

Réponse. $f(x) = -2x \sin(x^2)$; tangente $y = -\sqrt{2\pi} x + \pi$.