Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : équations, signaux et optimisation

Fonctions trigonométriques — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Valeurs remarquables.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Identités.

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ $\quad \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ $\quad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \qquad \sin 2x = 2\sin x \cos x$$

Symétries : $\cos(-x) = \cos x$ (**paire**), $\sin(-x) = -\sin x$ (**impaire**), $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\sin(\pi - x) = \sin x$.

Résolution d'équations.

$$\cos x = \cos a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi \text{ ou } x = -a + 2k\pi$$

$$\sin x = \sin a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - a + 2k\pi$$

⚠ On n'oublie **jamais** la seconde famille de solutions, et l'on **filtre** ensuite selon l'intervalle demandé.

Dérivées.

$(\sin x)' = \cos x$ $\quad (\cos x)' = -\sin x$ $\quad (\sin u)' = u' \cos u$ $\quad (\cos u)' = -u' \sin u$

Signaux. Pour $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$: **amplitude** $|A|$, **période** $T = \frac{2\pi}{\omega}$, **fréquence** $\frac{1}{T}$, **déphasage** φ.

Forme condensée : $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(x - \varphi)$ — l'amplitude $\sqrt{a^2 + b^2}$ donne directement les extremums.

Correction de l'exercice 1 – Équation en cosinus

— **Valeur de référence** : $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

— **Solutions générales** :

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

— **Sur** $[0\,;2\pi]$: on filtre.

— $\frac{\pi}{3} \approx 1{,}047$ ✓ ;

— $-\frac{\pi}{3}$ est hors de l'intervalle, mais $-\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3} \approx 5{,}236$ ✓

— **Solutions** : $S = \left\{\frac{\pi}{3}\,;\frac{5\pi}{3}\right\}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Contrôle** : $\cos\frac{5\pi}{3} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ ✓

— **Lecture sur le cercle** : les deux solutions sont **symétriques par rapport à l'axe des abscisses** — c'est la traduction géométrique des deux familles.

Réponse. $S = \left\{\frac{\pi}{3}\,;\frac{5\pi}{3}\right\}$ sur $[0\,;2\pi]$.

Correction de l'exercice 2 – Équation en sinus

— **Valeur de référence** : $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

— **Solutions générales** : $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$.

— **Filtrage sur** $[0\,;2\pi]$:

— $-\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4} \approx 5{,}498$ ✓ ;

— $\frac{5\pi}{4} \approx 3{,}927$ ✓

— **Solutions** : $S = \left\{\frac{5\pi}{4}\,;\frac{7\pi}{4}\right\}$.

— **Contrôles** : $\sin\frac{5\pi}{4} = -0{,}7071$ ✓ et $\sin\frac{7\pi}{4} = -0{,}7071$ ✓

— **Lecture sur le cercle** : les deux solutions sont dans le **demi-plan inférieur** ($\sin < 0$), symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Réponse. $S = \left\{\frac{5\pi}{4}\,;\frac{7\pi}{4}\right\}$.

Correction de l'exercice 3 – Équation avec argument composé

— **On résout d'abord en** $2x$: $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc

$$2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

— **Division par 2** (attention : le $2k\pi$ devient $k\pi$) :

$$x = \frac{\pi}{12} + k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$$

— **Filtrage sur** $[0\,;\pi]$:

— $\frac{\pi}{12} \approx 0{,}262$ ✓ ;

— $-\frac{\pi}{12} + \pi = \frac{11\pi}{12} \approx 2{,}880$ ✓

— **Solutions** : $S = \left\{\frac{\pi}{12}\,;\frac{11\pi}{12}\right\}$.

— **Contrôle** : $\cos\left(2 \times \frac{11\pi}{12}\right) = \cos\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ✓

— **Piège numéro un** : diviser $2k\pi$ par 2 donne $k\pi$ — oublier cette division fait **perdre la moitié** des solutions.

Réponse. $S = \left\{\frac{\pi}{12}\,;\frac{11\pi}{12}\right\}$.

Correction de l'exercice 4 – Inéquation trigonométrique

— **Valeurs limites** : $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ pour $x = \pm\frac{\pi}{4}$ sur cet intervalle.

— **Lecture sur le cercle** : $\cos x$ est **grand** quand l'angle est proche de 0 ; la condition $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ décrit donc un **arc centré en** 0.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Solution** :

$$S = \left[-\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right]$$

— **Vérifications** : $x = 0$ donne $\cos 0 = 1 \geq 0{,}707$ ✓ ; $x = \frac{\pi}{2}$ donne $0 < 0{,}707$ — bien exclu ✓

— **Bornes** : incluses, l'inégalité étant large ✓

— **Méthode générale** : on place les valeurs limites sur le **cercle trigonométrique**, puis on lit l'**arc** correspondant à l'inégalité — plus fiable que le tableau de variations pour les fonctions périodiques.

Réponse. $S = \left[-\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right]$.

Correction de l'exercice 5 – Dérivées trigonométriques

a) Forme $u'\cos u$ avec $u = 3x - 1$: $f'(x) = 3\cos(3x-1)$.

b) Forme $2uu'$ avec $u = \cos x$:

$$g'(x) = 2\cos x \times (-\sin x) = -2\sin x\cos x = -\sin(2x)$$

— c) **Produit** : $h'(x) = \sin x + x\cos x$.

— **Contrôles** : g est aussi $\dfrac{1+\cos 2x}{2}$, dont la dérivée est $-\sin 2x$ ✓ — les deux méthodes concordent.

— $h'(0) = 0$, et effectivement $h(x) = x\sin x \approx x^2$ près de 0, dont la dérivée s'annule en 0 ✓

— **Vérification numérique de a)** : $f'(0) = 3\cos(-1) = 3 \times 0{,}5403 \approx 1{,}621$; et le taux $\dfrac{f(0{,}01)-f(0)}{0{,}01} = \dfrac{-0{,}8360 + 0{,}8415}{0{,}01} \approx 1{,}62$ ✓

Réponse. a) $3\cos(3x-1)$ · b) $-\sin(2x)$ · c) $\sin x + x\cos x$.

Correction de l'exercice 6 – Étude d'une fonction périodique

— **Dérivée** : $f'(x) = \cos x - \dfrac{1}{2}$.

— **Annulation** : $\cos x = \dfrac{1}{2}$ donne $x = \dfrac{\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{3}$ sur $[0\,;2\pi]$.

— **Signe** : $\cos x > \dfrac{1}{2}$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{3}\right[$ et $\left]\frac{5\pi}{3}\,;2\pi\right]$ — c'est là que f **croît**.

— **Variations** : f croît sur $\left[0\,;\frac{\pi}{3}\right]$, **décroît** sur $\left[\frac{\pi}{3}\,;\frac{5\pi}{3}\right]$, croît sur $\left[\frac{5\pi}{3}\,;2\pi\right]$.

— **Maximum local** en $\frac{\pi}{3}$: $f = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi}{6} \approx 0{,}866 - 0{,}524 = 0{,}342$.

— **Minimum local** en $\frac{5\pi}{3}$: $f = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{5\pi}{6} \approx -0{,}866 - 2{,}618 = -3{,}484$.

— **Valeurs aux bornes** : $f(0) = 0$ et $f(2\pi) = -\pi \approx -3{,}142$.

— **Extremums globaux sur l'intervalle** : maximum 0,342 en $\frac{\pi}{3}$; minimum $-3{,}484$ en $\frac{5\pi}{3}$ ✓

— **Remarque** : f n'est **pas périodique** (le terme $-\frac{x}{2}$ brise la périodicité) — d'où la nécessité d'étudier sur un intervalle borné.

Réponse. Max $\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi}{6} \approx 0{,}342$; min $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{5\pi}{6} \approx -3{,}484$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 7 – Amplitude et forme condensée

— **Amplitude** : $A = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$.

— **Factorisation** :

$$f(x) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right)$$

— On reconnaît $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\varphi = \frac{1}{2}$, soit $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

— **Forme condensée** (via $\cos(x-\varphi) = \cos x\cos\varphi + \sin x\sin\varphi$) :

$$f(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

— **Extremums** : cos variant dans $[-1\,;1]$, on a $f \in [-2\,;2]$.

— **Maximum** 2 atteint quand $x - \frac{\pi}{6} = 0$, soit $x = \frac{\pi}{6}$; **minimum** -2 en $x = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$.

— **Contrôles** : $f(0) = \sqrt{3} \approx 1{,}732$, et $2\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2 \times 0{,}866 = 1{,}732$ ✓ ;
$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \times 0{,}866 + 0{,}5 = 1{,}5 + 0{,}5 = 2$ ✓

— **Intérêt** : l'amplitude et le déphasage se lisent **directement**, sans étude de fonction.

Réponse. $f(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$; extremums ± 2.

Correction de l'exercice 8 – Signal sinusoïdal

a) - **Amplitude** : 12 V.

— **Pulsation** : $\omega = 100\pi$ rad/s, donc la **période** vaut

$$T = \frac{2\pi}{100\pi} = 0{,}02 \text{ s} = 20 \text{ ms}$$

— **Fréquence** : $f = \frac{1}{T} = 50$ Hz — c'est la fréquence du réseau électrique européen.

b) - **Valeur initiale** : $u(0) = 12\sin\frac{\pi}{4} = 12 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2} \approx 8{,}49$ V.

— **Maximum** : atteint quand sin = 1, soit $100\pi t + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

— Donc $100\pi t = \frac{\pi}{4}$, d'où $t = \frac{1}{400} = 0{,}0025$ s $= 2{,}5$ ms.

— **Contrôle** : $u(0{,}0025) = 12\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = 12\sin\frac{\pi}{2} = 12$ V ✓

— **Interprétation du déphasage** : $\varphi = \frac{\pi}{4}$ avance le signal de $\frac{T}{8} = 2{,}5$ ms par rapport à un sinus pur ✓

Réponse. a) 12 V, $T = 20$ ms, 50 Hz · b) $u(0) = 6\sqrt{2} \approx 8{,}49$ V ; max à 2,5 ms.

Correction de l'exercice 9 – Identité trigonométrique

— **Factorisation** (différence de carrés) :

$$\cos^4 x - \sin^4 x = \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)$$

— Le second facteur vaut 1 (identité fondamentale).

— Le premier est exactement $\cos(2x)$ (formule de duplication).

— **Conclusion** : $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos(2x)$ ✓

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Contrôles** : en $x = 0$, $1 - 0 = 1 = \cos 0$ ✓ ; en $x = \frac{\pi}{4}$, $\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 = \cos\frac{\pi}{2}$ ✓ ; en $x = \frac{\pi}{3}$, $\frac{1}{16} - \frac{9}{16} = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$ ✓

— **Méthode** : devant une puissance 4, chercher une **différence de carrés** avant tout développement — c'est presque toujours la voie courte.

Réponse. Différence de carrés, puis $\cos^2 + \sin^2 = 1$.

Correction de l'exercice 10 – Équation avec duplication

— **Duplication** : $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, donc l'équation devient

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

— **Changement de variable** $X = \cos x$, avec $X \in [-1\,;1]$: $2X^2 + X - 1 = 0$.

— **Racines** : $\Delta = 1 + 8 = 9$, donc $X = \frac{-1 \pm 3}{4}$, soit $X = \frac{1}{2}$ ou $X = -1$ — **les deux sont dans** $[-1\,;1]$ ✓

— **Retour à** x :

— $\cos x = \frac{1}{2}$ donne $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$;

— $\cos x = -1$ donne $x = \pi$.

— **Solutions** : $S = \left\{\frac{\pi}{3}\,;\pi\,;\frac{5\pi}{3}\right\}$.

— **Vérification** pour $x = \pi$: $\cos 2\pi + \cos\pi = 1 - 1 = 0$ ✓

— **Contrainte à ne pas oublier** : une racine X hors de $[-1\,;1]$ serait à **rejeter** (aucun angle n'a un cosinus de 2).

Réponse. $S = \left\{\frac{\pi}{3}\,;\pi\,;\frac{5\pi}{3}\right\}$.

Correction de l'exercice 11 – Limite trigonométrique

Première limite. On fait apparaître la limite de référence $\frac{\sin u}{u} \to 1$:

$$\frac{\sin 5x}{3x} = \frac{5}{3} \times \frac{\sin 5x}{5x} \longrightarrow \frac{5}{3}$$

Seconde limite. On utilise $1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$:

$$\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \longrightarrow \frac{1}{2}$$

— **Contrôles** : en $x = 0{,}001$, $\frac{\sin 0{,}005}{0{,}003} \approx 1{,}6667$ ✓ ; $\frac{1 - \cos 0{,}01}{10^{-4}} \approx 0{,}49999$ ✓

— **Méthode alternative pour la seconde** : multiplier par le conjugué $1 + \cos x$ donne $\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} \to \frac{1}{2}$ ✓

— **Limites à mémoriser** : $\frac{\sin x}{x} \to 1$, $\frac{1-\cos x}{x^2} \to \frac{1}{2}$, $\frac{\tan x}{x} \to 1$.

Réponse. $\frac{5}{3}$ et $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 12 – Optimisation avec trigonométrie

— **Paramétrage** : le sommet supérieur droit a pour coordonnées $(\cos\theta\,;\sin\theta)$, avec $\theta \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Dimensions** : largeur $2\cos\theta$, hauteur $\sin\theta$.
— **Aire** :

$$A(\theta) = 2\cos\theta\sin\theta = \sin(2\theta)$$

— **Maximisation** : $\sin(2\theta)$ est maximale quand $2\theta = \frac{\pi}{2}$, soit $\theta = \frac{\pi}{4}$.
— **Aire maximale** : $A = \sin\frac{\pi}{2} = 1$.
— **Dimensions optimales** : largeur $2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \approx 1{,}414$ et hauteur $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$.
— **Contrôles** : $A\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = 0{,}866 < 1$ ✓ ; $A\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{2\pi}{3} = 0{,}866 < 1$ ✓
— **Élégance de la méthode** : la formule de duplication transforme un produit en un **simple sinus**, dont le maximum est immédiat — aucune dérivée n'est nécessaire.

Réponse. $A(\theta) = \sin(2\theta)$, maximale en $\theta = \frac{\pi}{4}$ avec $A = 1$.

Correction de l'exercice 13 – Parité et périodicité

— **Parité** : $f(-x) = \cos(-x) + \cos(-2x) = \cos x + \cos 2x = f(x)$ — f est **paire**.
— **Périodicité** : $\cos x$ est 2π-périodique, $\cos 2x$ est π-périodique. La période de la somme est le **ppcm**, soit 2π.
— **Vérification** : $f(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) + \cos(2x + 4\pi) = f(x)$ ✓
— **Valeurs** : $f(0) = 1 + 1 = 2$ (maximum, les deux cosinus valant 1) ; $f(\pi) = -1 + 1 = 0$.
— **Conséquence pratique** : la parité permet d'étudier f sur $[0\,;\pi]$ seulement, puis de compléter par **symétrie par rapport à l'axe des ordonnées**, et la périodicité par translations de 2π.
— **Contrôles** : $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + (-1) = -1$ ✓ ; $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -0{,}5 + (-0{,}5) = -1$ ✓
— **Minimum** : la dérivée $f'(x) = -\sin x - 2\sin 2x$ s'annule notamment en $x = \pi$; le minimum de f vaut $-\frac{9}{8} = -1{,}125$, atteint pour $\cos x = -\frac{1}{4}$.

Réponse. Paire, de période 2π ; $f(0) = 2$ et $f(\pi) = 0$.

Correction de l'exercice 14 – Tangente à une courbe trigonométrique

— **Valeurs** : $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866$; $f'(x) = \cos x$, donc $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.
— **Tangente** :

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

— Numériquement, $y = 0{,}5x + 0{,}3423$.
— **Position** : $f''(x) = -\sin x$, **négative** sur $]0\,;\pi[$ — la fonction y est **concave**, donc la courbe est **sous** sa tangente au voisinage de $\frac{\pi}{3}$.
— **Contrôles** : en $x = 1{,}2$, $\sin 1{,}2 = 0{,}93204$ et la tangente donne $0{,}9423$ — la courbe est bien **en dessous** ✓
— En $x = 1$, $\sin 1 = 0{,}84147$ contre $0{,}8423$ pour la tangente ✓
— **Point d'inflexion** : $f'' = 0$ en $x = 0$ et $x = \pi$ — c'est là que la courbe **traverse** ses tangentes.

Réponse. $y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}$; courbe en dessous (concavité).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 15 – Modèle de marée

a) - **Période** : $\omega = \frac{\pi}{6}$, donc $T = \frac{2\pi}{\pi/6} = 12$ heures — cohérent avec le cycle réel des marées ✓

— **Hauteurs extrêmes** : $\sin \in [-1\,;1]$, donc $h \in [2\,;8]$ m.
— Minimum 2 m, maximum 8 m.

b) On résout $5 + 3\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) \geq 6{,}5$, soit $\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) \geq \frac{1}{2}$.

— **Sur un tour** : $\sin u \geq \frac{1}{2}$ pour $u \in \left[\frac{\pi}{6}\,;\frac{5\pi}{6}\right]$, arc de longueur $\frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$.
— **Retour à** t : avec $u = \frac{\pi t}{6}$, on a $t = \frac{6u}{\pi}$, donc $t \in [1\,;5]$.
— **Durée** : 4 heures par cycle de 12 h.
— **Contrôles** : $h(1) = 5 + 1{,}5 = 6{,}5$ ✓ ; $h(3) = 5 + 3 = 8$ ✓ ; $h(5) = 6{,}5$ ✓ ; $h(6) = 5$ ✓
— **Proportion** : $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ du temps — soit 8 heures par jour au-dessus de 6,5 m.

Réponse. a) $T = 12$ h, $h \in [2\,;8]$ · b) 4 h par cycle ($t \in [1\,;5]$).

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : étude complète type bac

a) **Simplification** par les formules de duplication :

— $2\sin x\cos x = \sin(2x)$, donc

$$f(x) = \sin(2x) - \cos(2x)$$

— **Forme condensée** : l'amplitude est $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, et

$$f(x) = \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

— **Vérification** : $\sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\sin 2x\cos\frac{\pi}{4} - \cos 2x\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sin 2x - \cos 2x$ ✓

b) **Variations.** La dérivée est $f'(x) = 2\sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

— f' s'annule quand $2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, soit $x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$.
— Sur $[0\,;\pi]$: $x = \frac{3\pi}{8} \approx 1{,}178$ et $x = \frac{7\pi}{8} \approx 2{,}749$.
— **Maximum** en $\frac{3\pi}{8}$: $f = \sqrt{2} \approx 1{,}414$.
— **Minimum** en $\frac{7\pi}{8}$: $f = -\sqrt{2} \approx -1{,}414$.
— **Valeurs aux bornes** : $f(0) = 0 - 1 = -1$ et $f(\pi) = 0 - 1 = -1$.
— **Contrôles** : $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - 0 = 1$ ✓ ; $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + 1 = 1$ ✓
— **Bilan des variations** : f **croît** sur $\left[0\,;\frac{3\pi}{8}\right]$, **décroît** sur $\left[\frac{3\pi}{8}\,;\frac{7\pi}{8}\right]$, puis **croît** sur $\left[\frac{7\pi}{8}\,;\pi\right]$.

Réponse. a) $f(x) = \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ · b) extremums $\pm\sqrt{2}$ en $\frac{3\pi}{8}$ et $\frac{7\pi}{8}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).