

Plaquette 1 - Valeurs remarquables et identités

Fonctions trigonométriques — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition. Le point M du cercle trigonométrique associé au réel x a pour coordonnées $(\cos x; \sin x)$.

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad -1 \leq \cos x \leq 1 \quad -1 \leq \sin x \leq 1$$

Valeurs remarquables :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Périodicité : $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ pour tout entier k . La **mesure principale** est celle qui appartient à $] -\pi; \pi]$.

Angles associés (symétries du cercle) :

- $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$;
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\sin(\pi - x) = \sin x$;
- $\cos(\pi + x) = -\cos x$, $\sin(\pi + x) = -\sin x$;
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.

Équations : $\cos x = \cos a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi$; $\sin x = \sin a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi$.

Correction de l'exercice 1 - Placer des points sur le cercle

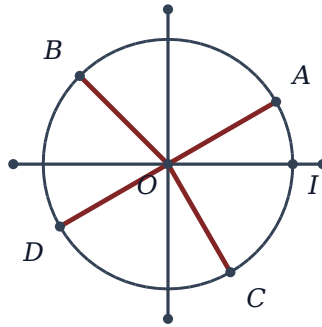
On part de $I(1; 0)$ et on tourne dans le **sens direct** pour un réel positif, dans le sens indirect pour un réel négatif. Un tour complet mesure 2π :

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ \quad \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$

- $A : \frac{\pi}{6} = 30^\circ$, **premier** quadrant.
- $B : \frac{3\pi}{4} = 135^\circ$, **deuxième** quadrant, sur la bissectrice.
- $C : -\frac{\pi}{3} = -60^\circ$, on tourne vers le bas : **quatrième** quadrant.
- $D : \frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$, un demi-tour puis 30° : **troisième** quadrant.

— **Remarque** : D est le symétrique de A par rapport à l'origine O , puisque $\frac{7\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + \pi$.

Réponse. A : 1^{er} quadrant · B : 2^e · C : 4^e · D : 3^e (symétrique de A par rapport à O).



Les quatre points placés

Correction de l'exercice 2 - Lire un cosinus et un sinus

a) $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$: le point M est le symétrique de $A\left(\frac{\pi}{6}\right)$ par rapport à l'**axe des ordonnées**. Cette symétrie change le signe de l'abscisse et conserve l'ordonnée :

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \quad \sin(\pi - x) = \sin x$$

— $\cos \frac{5\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

— $\sin \frac{5\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

b) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1 \checkmark$

— **Cohérence** : M est dans le deuxième quadrant, cosinus négatif et sinus positif.

Réponse. $\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 3 - Les quatre symétriques d'un point

a) On lit les symétries sur la figure :

- $N(\pi - x)$: symétrique de M par rapport à l'**axe des ordonnées** ;
- $P(\pi + x)$: symétrique par rapport à l'**origine** O (demi-tour) ;
- $Q(-x)$: symétrique par rapport à l'**axe des abscisses**.

b) Chaque symétrie agit sur les coordonnées $(\cos x ; \sin x)$:

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \quad \sin(\pi + x) = -\sin x \quad \cos(-x) = \cos x$$

- Par rapport à l'axe des ordonnées, l'abscisse change de signe ;
- par rapport à l'origine, les deux coordonnées changent de signe ;
- par rapport à l'axe des abscisses, seule l'ordonnée change de signe.
- **Méthode** : plutôt qu'apprendre les formules par cœur, on **dessine** et on lit.

Réponse. $\cos(\pi - x) = -\cos x$; $\sin(\pi + x) = -\sin x$; $\cos(-x) = \cos x$.

Correction de l'exercice 4 - Mesure principale

On retire (ou ajoute) des multiples de 2π pour tomber dans $] -\pi ; \pi]$, en utilisant la **périodicité** :

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin x$$

$$a) \frac{17\pi}{6} - 2\pi = \frac{17\pi - 12\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \checkmark$$

$$b) -\frac{11\pi}{4} + 2\pi = -\frac{3\pi}{4} \checkmark$$

$$c) \frac{31\pi}{3} = \frac{30\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 10\pi + \frac{\pi}{3}, \text{ donc la mesure principale est } \frac{\pi}{3} \text{ (} 10\pi \text{ représente 5 tours).}$$

Valeurs :

$$- \cos \frac{17\pi}{6} = \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$- \sin \frac{31\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

— **Astuce** : écrire le numérateur comme un multiple de $2d$ (12 pour des sixièmes) plus un reste.

Réponse. a) $\frac{5\pi}{6}$ · b) $-\frac{3\pi}{4}$ · c) $\frac{\pi}{3}$; $\cos \frac{17\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \frac{31\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Correction de l'exercice 5 - Du cosinus au sinus

a) $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$: le point est dans le **quatrième quadrant** (abscisse positive, ordonnée négative), à l'abscisse 0,6.

b) **Relation fondamentale** :

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

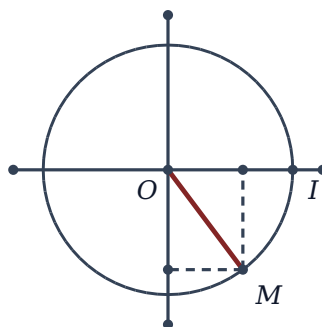
$$- \text{Donc } \sin x = \frac{4}{5} \text{ ou } \sin x = -\frac{4}{5}.$$

$$- \text{Dans le quatrième quadrant, le sinus est } \mathbf{n\acute{e}gatif} : \sin x = -\frac{4}{5}.$$

— **Piège** : la relation donne deux valeurs possibles ; c'est l'**intervalle** qui tranche. Sans lui, on ne pourrait pas conclure.

$$- \text{Contrôle : } \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9+16}{25} = 1 \checkmark$$

Réponse. $\sin x = -\frac{4}{5}$.



M a pour abscisse 0,6, dans le quatrième quadrant

Correction de l'exercice 6 - Une identité à démontrer

On développe et on utilise la **relation fondamentale** :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

a) Avec les identités remarquables :

- $(\cos x + \sin x)^2 = \cos^2 x + 2 \cos x \sin x + \sin^2 x = 1 + 2 \cos x \sin x$;
- $(\cos x - \sin x)^2 = 1 - 2 \cos x \sin x$.
- La somme vaut 2 : les doubles produits se compensent.

b) On factorise la différence de deux carrés :

- $\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)$;
- le second facteur vaut 1, d'où le résultat.
- **Contrôle** en $x = 0$ pour b) : $0 - 1 = 0 - 1$ ✓

Réponse. a) Les doubles produits s'annulent · b) $a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$ avec $a^2 + b^2 = 1$.

Correction de l'exercice 7 - Un quart de tour

a) Ajouter $\frac{\pi}{2}$ fait tourner d'un **quart de tour** dans le sens direct : M' est l'image de M par la **rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$** .

b) Un quart de tour direct transforme le point $(a; b)$ en $(-b; a)$ (par exemple, $I(1; 0)$ devient $J(0; 1)$). Donc $M'(-\sin x; \cos x)$, c'est-à-dire :

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

- **Vérification** sur la figure, avec $x = \frac{\pi}{6}$: M' est associé à $\frac{2\pi}{3}$, et $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} = -\sin \frac{\pi}{6}$ ✓
- **Usage** : ces formules serviront à dériver : $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$ sont des « quarts de tour ».

Réponse. Rotation d'un quart de tour : $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$, $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$.

Correction de l'exercice 8 - Résoudre une équation en cosinus

a) On cherche les points du cercle d'**abscisse** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$: la droite verticale correspondante coupe le cercle en deux points, symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

- On part de $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; avec $\cos(\pi - x) = -\cos x$, on obtient $\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (point A).
- Son symétrique B est associé à $-\frac{5\pi}{6}$.

$$\text{Dans }]-\pi; \pi] : S = \left\langle -\frac{5\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\rangle.$$

b) Dans $\mathbb{R}$, on ajoute tous les tours complets :

$$\cos x = \cos a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi \text{ ou } x = -a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$- S = \left\langle \frac{5\pi}{6} + 2k\pi; -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\rangle.$$

Réponse. a) $\left\langle -\frac{5\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\rangle$ · b) $x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

Correction de l'exercice 9 - Un sinus négatif

On cherche les points d'**ordonnée** $-\frac{1}{2}$: ils sont sous l'axe des abscisses, symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

— On part de la valeur connue $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

— Le sinus est **négatif** dans les 3^e et 4^e quadrants. Avec les angles associés :

$$\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} \quad \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6}$$

— Les solutions sont $\frac{7\pi}{6}$ (point P) et $\frac{11\pi}{6}$ (point Q), toutes deux dans $[0; 2\pi[$.

$$S = \left\langle \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \right\rangle$$

— **Piège** : répondre $-\frac{\pi}{6}$, qui est bien une solution de l'équation, mais n'appartient **pas** à $[0; 2\pi[$.

Réponse. $S = \left\langle \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \right\rangle$.

Correction de l'exercice 10 - Inéquations sur le cercle

On repère sur le cercle l'**arc** des points qui conviennent, puis on lit les réels associés.

a) $\cos x \geq 0$: points d'**abscisse positive**, c'est-à-dire la moitié droite du cercle, de J' (en bas) à J (en haut).

$$S = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$$

b) $\sin x > \frac{1}{2}$: points **au-dessus** de la droite horizontale $y = \frac{1}{2}$, qui coupe le cercle en $A\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $B\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.

— L'arc qui convient va de A à B en passant par J , extrémités **exclues** (inégalité stricte).

— $S = \left] \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right[$.

— **Méthode** : d'abord résoudre l'**équation** ($\sin x = \frac{1}{2}$) pour trouver les bornes, puis choisir le bon arc.

Réponse. a) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$ · b) $\left] \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right[$.

Correction de l'exercice 11 - Simplifier une expression

On remplace chaque terme grâce aux **angles associés** :

$$\cos(\pi \pm x) = -\cos x \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

a) $A = -\cos x - \cos x + \cos x = -\cos x$.

b) Avec $\sin(-x) = -\sin x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$:

$$B = -\sin x + \sin x + \sin x = \sin x$$

— **Contrôle** en $x = 0$: $A = -1 - 1 + 1 = -1 = -\cos 0$ ✓ et $B = 0 + 0 + 0 = 0 = \sin 0$ ✓

— **Méthode** : un terme à la fois, en redessinant la symétrie en cas de doute.

Réponse. $A = -\cos x$ et $B = \sin x$.

Correction de l'exercice 12 - Sommes qui s'annulent

On associe les termes deux à deux grâce aux angles associés :

$$\cos(\pi - a) = -\cos a \quad \sin(\pi + a) = -\sin a$$

- a) $\frac{4\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{5}$, donc $\cos \frac{4\pi}{5} = -\cos \frac{\pi}{5}$ et $S = 0$.
 b) $\frac{8\pi}{7} = \pi + \frac{\pi}{7}$, donc $\sin \frac{8\pi}{7} = -\sin \frac{\pi}{7}$ et $T = 0$.
 c) $\frac{7\pi}{8} = \pi - \frac{\pi}{8}$ et $\frac{5\pi}{8} = \pi - \frac{3\pi}{8}$: les termes s'annulent deux à deux, $U = 0$.

— **Interprétation** : les points associés sont **symétriques** par rapport à l'axe des ordonnées (a et c) ou à l'origine (b) ; leurs abscisses ou ordonnées sont opposées.

Réponse. $S = T = U = 0$.

Correction de l'exercice 13 - L'hexagone régulier

a) Chaque sommet a pour coordonnées $(\cos x; \sin x)$:

- $A(1; 0)$, $B\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $C\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
 — $D(-1; 0)$, $E\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $F\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

b) **Longueur AB** :

$$AB = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

- Le côté de l'hexagone est **égal au rayon** du cercle : les triangles OAB , OBC ... sont **équilatéraux**.
 — **Contrôle** : $BC = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \checkmark$

Réponse. Sommets $\left(\cos \frac{k\pi}{3}; \sin \frac{k\pi}{3}\right)$; côté = 1 = rayon.

Correction de l'exercice 14 - Quatre solutions

On isole le carré, puis on prend les **deux** racines :

$$4 \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \text{ ou } \cos x = -\frac{1}{2}$$

- $\cos x = \frac{1}{2}$ dans $[0; 2\pi[$: $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$ (points A et D).
 — $\cos x = -\frac{1}{2}$: $x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$ (points B et C), par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

$$S = \left\langle \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right\rangle$$

- **Piège** : oublier la racine négative, $\cos x = -\frac{1}{2}$, et ne trouver que deux solutions.

Réponse. $S = \left\langle \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right\rangle$.

Correction de l'exercice 15 - Distance entre deux points du cercle

a) Avec $M(\cos t; \sin t)$ et $I(1; 0)$:

$$IM^2 = (\cos t - 1)^2 + \sin^2 t = \cos^2 t - 2 \cos t + 1 + \sin^2 t = 2 - 2 \cos t$$

en utilisant $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

b) $IM = 1 \Leftrightarrow 2 - 2 \cos t = 1 \Leftrightarrow \cos t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{3} \text{ ou } t = \frac{5\pi}{3}$.

— $IM^2 = 2 - 2 \cos t$ est **maximal** quand $\cos t$ est minimal, c'est-à-dire $\cos t = -1$, soit $t = \pi$: alors $IM = 2$ (M est diamétralement opposé à I).

— **Cohérence** : pour $t = \frac{\pi}{3}$, le triangle OIM est équilatéral, d'où $IM = 1$ ✓

Réponse. a) $IM^2 = 2 - 2 \cos t$ · b) $IM = 1$ pour $t = \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{5\pi}{3}$; maximum 2 pour $t = \pi$.