

Plaquette 3 - Variations et extremums

Fonctions trigonométriques — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Variations de référence :

- $\sin$ est croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$;
- $\cos$ est décroissante sur $[0; \pi]$ et croissante sur $[\pi; 2\pi]$.

Signes sur $[0; 2\pi]$: $\sin x \geq 0$ sur $[0; \pi]$; $\cos x \geq 0$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Réduction de l'intervalle : si f est 2π -périodique, on l'étudie sur un intervalle de longueur 2π ; si de plus elle est paire, sur $[0; \pi]$ (la courbe se complète par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées).

Encadrements : $-1 \leq \sin x \leq 1$ et $-1 \leq \cos x \leq 1$ donnent des bornes immédiates.

Inégalités classiques (pour $x \geq 0$) :

$$\sin x \leq x \quad \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$$

Corollaire du TVI : sur un intervalle où f est continue et strictement monotone, l'équation $f(x) = k$ a au plus une solution, et exactement une si k est entre les valeurs aux bornes.

Correction de l'exercice 1 - Les variations du sinus

a) $\sin' = \cos$; sur $[0; 2\pi]$, $\cos x \geq 0$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$, négatif entre les deux.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos x$		+	0	-	0	+	
$\sin x$	0	croissante	1	décroissante	-1	croissante	0

b) On applique le **corollaire du TVI** sur chaque intervalle de monotonie :

- sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin$ croît de 0 à 1 : **une** solution ;
- sur $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, elle décroît de 1 à -1 : **une** solution ;
- sur $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$, ses valeurs sont négatives : aucune.

deux solutions, $x_1 \approx 0,93$ et $x_2 = \pi - x_1 \approx 2,21$

Réponse. Croissante, décroissante, croissante ; deux solutions à $\sin x = 0,8$.

Correction de l'exercice 2 - Étudier $2 \cos x - 1$

a) $f(x) = -2 \sin x$, négatif sur $[0; \pi]$ et positif sur $[\pi; 2\pi]$.

- f décroît de $f(0) = 1$ à $f(\pi) = -3$, puis croît jusqu'à $f(2\pi) = 1$.
- **Maximum** 1 (en 0 et 2π), **minimum** -3 (en π).

$$b) f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3}.$$

$f(x) > 0 \Leftrightarrow \cos x > \frac{1}{2}$: sur le cercle, les points à droite de la verticale d'abscisse $\frac{1}{2}$.

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right]$$

— **Contrôle** : les zéros $\frac{\pi}{3} \approx 1,05$ et $\frac{5\pi}{3} \approx 5,24$ se lisent sur la figure ✓

Réponse. Max 1, min -3 ; $f(x) > 0$ sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right]$.

Correction de l'exercice 3 - Un maximum et un minimum locaux

a) $f(x) = 1 - 2 \sin x$.

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \sin x \leq \frac{1}{2}$$

Sur $[0; \pi]$, $\sin x = \frac{1}{2}$ pour $x = \frac{\pi}{6}$ et $x = \frac{5\pi}{6}$; le sinus dépasse $\frac{1}{2}$ entre ces deux valeurs.

b) Tableau :

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$f(x)$		+	0	−	0	+	
f	2	croissante	$\approx 2,26$	décroissante	$\approx 0,89$	croissante	$\pi - 2$

— $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} \approx 2,26$ (maximum local) ;

— $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3} \approx 0,89$ (minimum local) ;

— $f(\pi) = \pi - 2 \approx 1,14$.

— **Minimum sur** $[0; \pi]$: c'est $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$, car $0,89 < 1,14 < 2$.

Réponse. Max local $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$, min local $\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}$.

Correction de l'exercice 4 - sin(2x) sur une demi-période

a) $f(x) = 2 \cos(2x)$. Quand x parcourt $[0; \pi]$, $X = 2x$ parcourt $[0; 2\pi]$:

$$\cos X = 0 \Leftrightarrow X = \frac{\pi}{2} \text{ ou } X = \frac{3\pi}{2}$$

soit $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{3\pi}{4}$.

b) $\cos X > 0$ pour $X \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f(x)$		+	0	−	0	+	
f	0	croissante	1	décroissante	-1	croissante	0

— **Méthode** : poser $X = 2x$ et **doubler l'intervalle** ; c'est l'erreur la plus fréquente d'oublier ce changement.

Réponse. Maximum 1 en $\frac{\pi}{4}$, minimum -1 en $\frac{3\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 5 - Le carré du cosinus

a) Avec $(u^2)' = 2u'u$ et $u = \cos x$, $u' = -\sin x$:

$$f(x) = -2 \sin x \cos x$$

b) Sur $[0; \pi]$, $\sin x \geq 0$; le signe de $f(x)$ est donc celui de $-\cos x$.

— Sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$: $\cos x \geq 0$, $f(x) \leq 0$, f décroît de 1 à 0.

— Sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$: $\cos x \leq 0$, $f(x) \geq 0$, f croît de 0 à 1.

Minimum : $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$; **maximum** : $f(0) = f(\pi) = 1$.

— **Cohérence** : un carré est compris entre 0 et 1 quand $\cos x$ est compris entre -1 et 1
✓

Réponse. Décroissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, croissante ensuite ; min 0, max 1.

Correction de l'exercice 6 - Encadrer le cosinus

a) $g'(x) = -\sin x + x = x - \sin x \geq 0$, d'après l'inégalité admise.

b) g est croissante sur $[0; +\infty[$, donc $g(x) \geq g(0) = 1 - 1 + 0 = 0$:

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$$

c) Avec $x = 0,1$: $\cos 0,1 \geq 1 - 0,005 = 0,995$, et $\cos 0,1 \leq 1$.

— $0,995 \leq \cos 0,1 \leq 1$; la valeur exacte est $\cos 0,1 \approx 0,99500$.

— **Méthode** : une inégalité en entraîne une autre en intégrant « d'un cran » ; en continuant, on retrouve les premiers termes du développement du cosinus.

— **Parité** : $\cos$ et x^2 étant pairs, l'inégalité vaut aussi pour $x < 0$.

Réponse. $g' = x - \sin x \geq 0$; $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$; $0,995 \leq \cos 0,1 \leq 1$.

Correction de l'exercice 7 - La gouttière

a) **Aire d'un trapèze** :

$$A = \frac{(\text{grande base} + \text{petite base}) \times \text{hauteur}}{2} = \frac{(1 + 2 \cos \theta + 1) \sin \theta}{2} = (1 + \cos \theta) \sin \theta$$

b) **Dérivée d'un produit**, avec $(1 + \cos \theta)' = -\sin \theta$:

— $A'(\theta) = -\sin^2 \theta + (1 + \cos \theta) \cos \theta = -(1 - \cos^2 \theta) + \cos \theta + \cos^2 \theta$;

— $A'(\theta) = 2 \cos^2 \theta + \cos \theta - 1 = (2 \cos \theta - 1)(\cos \theta + 1)$ (on vérifie en développant).

Signe : $\cos \theta + 1 > 0$; le signe est celui de $2 \cos \theta - 1$, positif pour $\cos \theta > \frac{1}{2}$, soit $\theta < \frac{\pi}{3}$.

— A croît sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$, décroît sur $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$.

— **Maximum** : $A\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1,30$.

L'angle optimal est 60° : la section est alors un **demi-hexagone régulier**.

Réponse. $A(\theta) = (1 + \cos \theta) \sin \theta$; maximum $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ pour $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Correction de l'exercice 8 - Cosinus égal à x

a) $g'(x) = -\sin x - 1$. Comme $\sin x \geq -1$, $g'(x) \leq 0$, et $g'(x) = 0$ seulement si $\sin x = -1$, ce qui n'arrive pas sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

g est **strictement décroissante**, de $g(0) = 1$ à $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

b) g est continue, strictement décroissante, et 0 est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et 1 : d'après le **corollaire du TVI**,

$$\exists! \alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \cos \alpha = \alpha$$

Encadrement :

$$- g(0,7) = \cos 0,7 - 0,7 \approx 0,765 - 0,7 = 0,065 > 0 ;$$

$$- g(0,8) = \cos 0,8 - 0,8 \approx 0,697 - 0,8 = -0,103 < 0.$$

Donc $0,7 < \alpha < 0,8$ (en fait $\alpha \approx 0,739$).

Réponse. g strictement décroissante ; une unique solution $\alpha \in]0,7; 0,8[$.

Correction de l'exercice 9 - Une fonction positive

a) On dérive $x \cos x$ comme un produit : $(x \cos x)' = \cos x - x \sin x$. Donc

$$f'(x) = \cos x - (\cos x - x \sin x) = x \sin x$$

b) Sur $[0; \pi]$: $x \geq 0$ et $\sin x \geq 0$, donc $f'(x) \geq 0$.

— f est **croissante** sur $[0; \pi]$;

— $f(0) = 0 - 0 = 0$, donc $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0; \pi]$.

— **Conséquence** : pour $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, en divisant par $x \cos x > 0$, on obtient $\frac{\sin x}{x \cos x} \geq 1$; c'est l'inégalité $\tan x \geq x$ des physiciens.

— **Contrôle** : $f(\pi) = 0 - \pi \times (-1) = \pi \geq 0$ ✓

Réponse. $f(x) = x \sin x \geq 0$ et $f(0) = 0$, donc $f \geq 0$.

Correction de l'exercice 10 - Réduire l'intervalle d'étude

a) $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\cos(-x) = \cos x$, donc $f(x + 2\pi) = f(x)$ et $f(-x) = f(x)$.

— Par périodicité, une étude sur $[-\pi; \pi]$ suffit ; par parité, la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, donc l'étude sur $[0; \pi]$ suffit.

b) $f'(x) = 2 \times (-\sin x) \cos x - \sin x = -\sin x (2 \cos x + 1)$.

Sur $[0; \pi]$: $\sin x \geq 0$; $2 \cos x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \leq \frac{2\pi}{3}$.

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f(x)$	0	—	0	+	0
f	2	décroissante	$-\frac{1}{4}$	croissante	0

— $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$: **minimum** ;

— $f(0) = 2$: **maximum**.

Réponse. Max 2 en 0, min $-\frac{1}{4}$ en $\frac{2\pi}{3}$; $f(\pi) = 0$.

Correction de l'exercice 11 - Maximum d'une combinaison

a) $f(x) = \cos x - \sqrt{3} \sin x$, qui s'annule si et seulement si $\cos x = \sqrt{3} \sin x$.

Le point $M(\cos x; \sin x)$ doit vérifier $X = \sqrt{3} Y$: il est sur la droite passant par O et par le point $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$, associé à $\frac{\pi}{6}$. Cette droite coupe le cercle en deux points diamétralement opposés :

$$x = \frac{\pi}{6} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$$

b) **Valeurs** :

$$- f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} + \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 ;$$

$$- f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2 ;$$

$$- f(0) = f(2\pi) = \sqrt{3} \approx 1,73.$$

Le **maximum** est 2 et le **minimum** -2.

— **Remarque** : $2 = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}$; l'amplitude de $a \sin x + b \cos x$ vaut toujours $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Réponse. $f = 0$ en $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{7\pi}{6}$; maximum 2, minimum -2.

Correction de l'exercice 12 - Une fonction strictement croissante

a) $f(x) = 1 - \cos x \geq 0$, puisque $\cos x \leq 1$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi$$

La dérivée est positive et ne s'annule qu'en des points **isolés** : f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

b) $\sin x = x \Leftrightarrow f(x) = 0$. Or $f(0) = 0$, et une fonction strictement croissante prend chaque valeur au plus une fois.

— La seule solution est $x = 0$.

— **Interprétation** : la droite $y = x$ ne rencontre la courbe du sinus qu'à l'origine, où elle lui est tangente.

— **Piège** : « $f \geq 0$ » ne donne a priori que « croissante » ; la stricte croissance vient de ce que f ne s'annule pas sur tout un intervalle.

Réponse. $f = 1 - \cos x \geq 0$ (nul en points isolés) ; unique solution $x = 0$.

Correction de l'exercice 13 - Oscillations d'un pendule

a) $-1 \leq \cos(3t) \leq 1$, donc $-0,2 \leq \theta(t) \leq 0,2$: le pendule s'écarte d'au plus 0,2 rad (environ 11°).

$$- \theta = 0,2 \text{ quand } \cos(3t) = 1, \text{ soit } 3t = 0 \text{ ou } 2\pi : t = 0 \text{ ou } t = \frac{2\pi}{3}.$$

$$- \theta = -0,2 \text{ quand } 3t = \pi : t = \frac{\pi}{3} \approx 1,05 \text{ s.}$$

b) **Vitesse angulaire** :

$$\theta'(t) = -0,6 \sin(3t)$$

$$- |\theta'(t)| \text{ est maximal (0,6 rad/s) quand } |\sin(3t)| = 1, \text{ soit } 3t = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} : t = \frac{\pi}{6} \text{ ou } t = \frac{\pi}{2}.$$

- À ces instants, $\theta(t) = 0,2 \cos \frac{\pi}{2} = 0$: le pendule va **le plus vite au passage à la verticale**.
- **Période** : $\frac{2\pi}{3} \approx 2,09$ s.

Réponse. $\theta \in [-0,2; 0,2]$; vitesse max 0,6 rad/s au passage à la verticale.

Correction de l'exercice 14 - Sinus de x sur x

a) Formule du quotient, avec $u = \sin x$ et $v = x$:

$$f(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}$$

b) $h'(x) = \cos x - x \sin x - \cos x = -x \sin x \leq 0$ sur $[0; \pi]$.

— h est décroissante, et $h(0) = 0$: donc $h(x) \leq 0$ sur $[0; \pi]$ (et même < 0 sur $]0; \pi]$, car h' ne s'annule qu'aux bornes).

c) $f(x)$ a le signe de $h(x)$: f est **strictement décroissante** sur $]0; \pi]$.

— Comme $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ en 0, f décroît de 1 (limite) à $f(\pi) = 0$.

— **Méthode** : quand le signe de la dérivée n'est pas évident, on étudie son numérateur comme une **nouvelle fonction**.

Réponse. $h' = -x \sin x \leq 0$, $h \leq 0$: f est décroissante sur $]0; \pi]$.

Correction de l'exercice 15 - Un minimum sur un intervalle ouvert

a) Avec $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$:

$$f(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{-\cos^3 x + \sin^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

b) Le dénominateur est positif ; le signe est celui de $\sin^3 x - \cos^3 x$, qui est celui de $\sin x - \cos x$ (la fonction cube est croissante).

— Sur $]0; \frac{\pi}{2}[$: $\sin x < \cos x$ pour $x < \frac{\pi}{4}$, et $\sin x > \cos x$ pour $x > \frac{\pi}{4}$.

— f décroît sur $]0; \frac{\pi}{4}]$ et croît sur $[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}[$.

Minimum :

— $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \approx 2,83$.

— **Aux bornes**, f tend vers $+\infty$ ($\sin x \rightarrow 0^+$ ou $\cos x \rightarrow 0^+$).

Réponse. Minimum $2\sqrt{2}$ en $\frac{\pi}{4}$.