

Plaquette 4 – Courbes, modèles — type bac

Fonctions trigonométriques — Terminale spé maths

Exercices

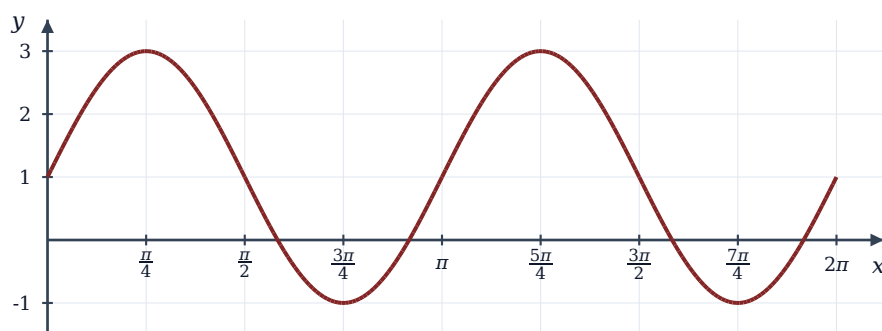
Méthode

Les phénomènes **périodiques** (roues, saisons, pendules, signaux) se modélisent par $A \sin(\omega t + \varphi) + B$ ou $A \cos(\omega t + \varphi) + B$: B est la **valeur moyenne**, $|A|$ l'**amplitude** et $\frac{2\pi}{\omega}$ la **période**. On lit ces paramètres sur une courbe, on résout des (in)équations sur le cercle, et on étudie les variations par la dérivée.

Exercice 1 – Identifier une sinusoïde

La courbe ci-dessous représente une fonction de la forme $f(x) = A \sin(\omega x) + B$, avec $A > 0$ et $\omega > 0$.

- Lire le maximum, le minimum et la période.
- En déduire A , B et ω .
- Vérifier avec la valeur $f(0)$ et le sens de variation en 0.

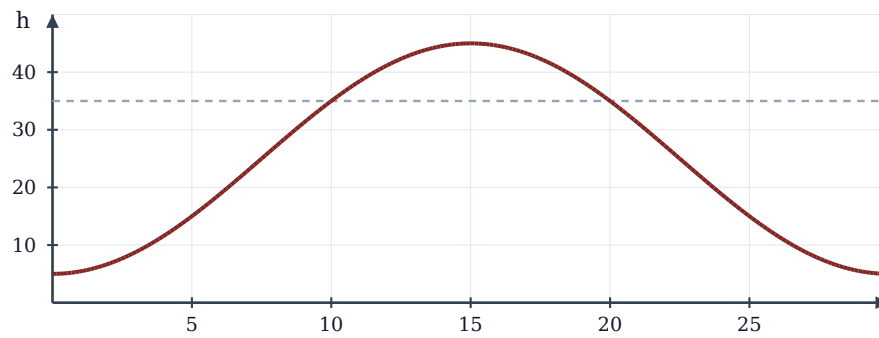


Courbe de f sur $[0; 2\pi]$

Exercice 2 - La grande roue

Une nacelle de grande roue est à la hauteur $h(t) = 25 - 20 \cos\left(\frac{\pi t}{15}\right)$ (en m), t en minutes.

- Donner les hauteurs minimale et maximale, et la durée d'un tour.
- Pendant combien de temps, par tour, la nacelle est-elle au-dessus de 35 m ?
- À quel instant la vitesse verticale est-elle maximale ?

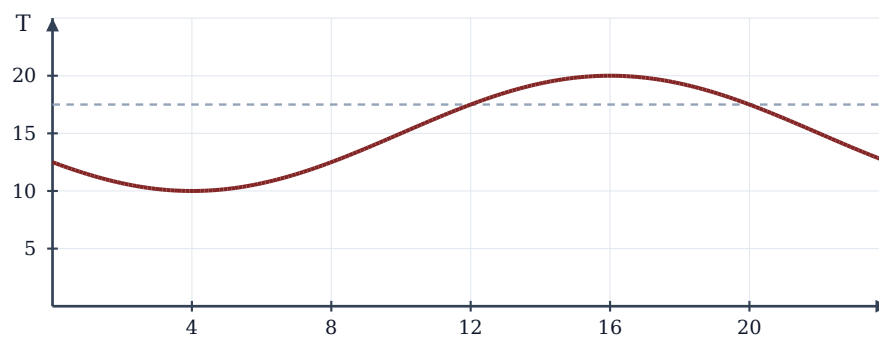


Hauteur de la nacelle pendant un tour, et niveau 35 m

Exercice 3 - Température sur une journée

La température (en °C) au cours d'une journée est modélisée par $T(t) = 15 - 5 \cos\left(\frac{\pi(t-4)}{12}\right)$, $t \in [0; 24]$ en heures.

- Quelles sont les températures minimale et maximale ? À quelles heures ?
- Pendant quelle plage horaire fait-il plus de 17,5 °C ?

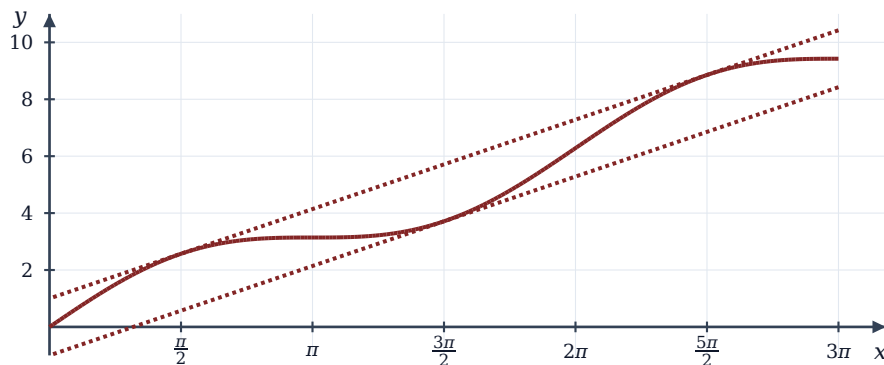


Température au cours de la journée et seuil de 17,5 °C

Exercice 4 - Une courbe entre deux droites

Soit $f(x) = x + \sin x$ sur $\mathbb{R}$.

- Montrer que la courbe de f est comprise entre les droites $y = x - 1$ et $y = x + 1$.
- Étudier le sens de variation de f et déterminer les points où la tangente est horizontale.
- En quels points la courbe touche-t-elle la droite $y = x + 1$?

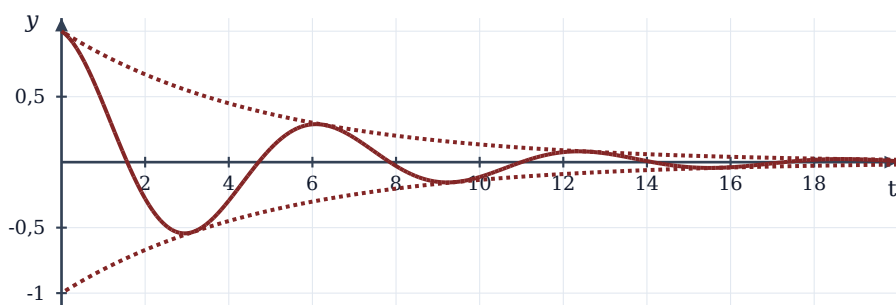


Courbe de f et droites $y = x \pm 1$

Exercice 5 - Oscillation amortie

Soit $f(t) = e^{-0,2t} \cos t$ pour $t \geq 0$.

- Montrer que $-e^{-0,2t} \leq f(t) \leq e^{-0,2t}$.
- En déduire $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$.
- En quels instants la courbe de f touche-t-elle la courbe de $t \mapsto e^{-0,2t}$?

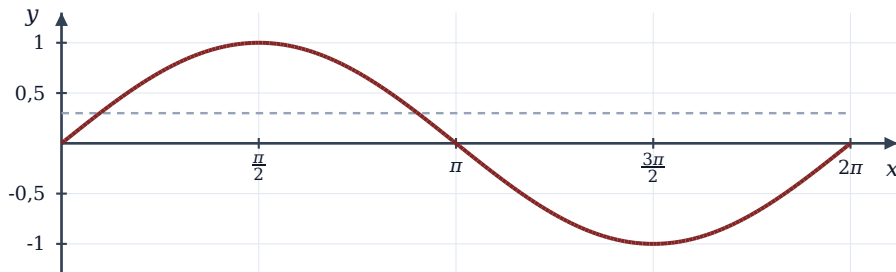


Oscillation amortie et ses deux enveloppes

Exercice 6 – Nombre de solutions d’une équation

On considère l’équation $\sin x = 0,3$ sur $[0; 2\pi]$.

- En utilisant les variations du sinus, déterminer le nombre de solutions.
- On note α la plus petite. Exprimer l’autre en fonction de α et donner des valeurs approchées.

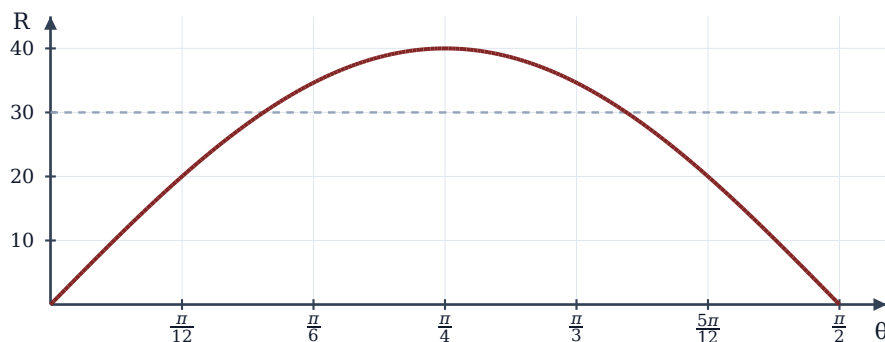


Courbe du sinus et droite $y = 0,3$

Exercice 7 – Portée d’un projectile

Un projectile lancé à 20 m/s sous un angle $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ retombe à la distance $R(\theta) = 40 \sin(2\theta)$ (en m, frottements négligés).

- Pour quel angle la portée est-elle maximale ? Quelle est-elle ?
- Déterminer les angles qui donnent une portée de 30 m. Que remarque-t-on ?



Portée en fonction de l’angle de tir

Exercice 8 – Période d’un pendule

Pour de petites oscillations, l’angle d’un pendule de longueur L (en m) vérifie $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t)$ avec $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ et $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$.

- Vérifier que $\theta''(t) = -\frac{g}{L} \theta(t)$.
- Calculer la période pour $L = 1 \text{ m}$.
- Quelle longueur donne une période de 2 s exactement ?

Exercice 9 – Une suite périodique

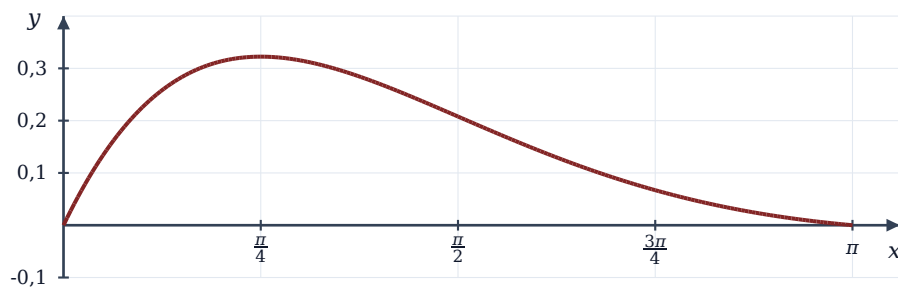
Soit $u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

- Calculer u_0 à u_6 et placer les points $(n; u_n)$ pour $0 \leq n \leq 12$.
- Montrer que $u_{n+6} = u_n$ pour tout n .
- La suite a-t-elle une limite ?

Exercice 10 - Étude d'une oscillation amortie

Soit $f(x) = e^{-x} \sin x$ sur $[0; \pi]$.

- Montrer que $f'(x) = e^{-x}(\cos x - \sin x)$.
- Dresser le tableau de variations de f et calculer son maximum.

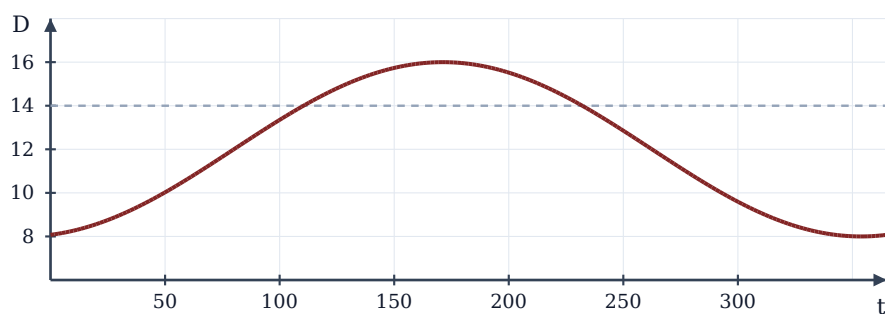


Courbe de f sur $[0; \pi]$

Exercice 11 - Durée du jour

À Paris, la durée du jour (en heures) le t -ième jour de l'année est modélisée par $D(t) = 12 + 4 \sin\left(\frac{2\pi(t-80)}{365}\right)$.

- Quelles sont les durées maximale et minimale du jour ? Quel jour la durée est-elle maximale ?
- Pendant combien de jours la durée du jour dépasse-t-elle 14 h ?

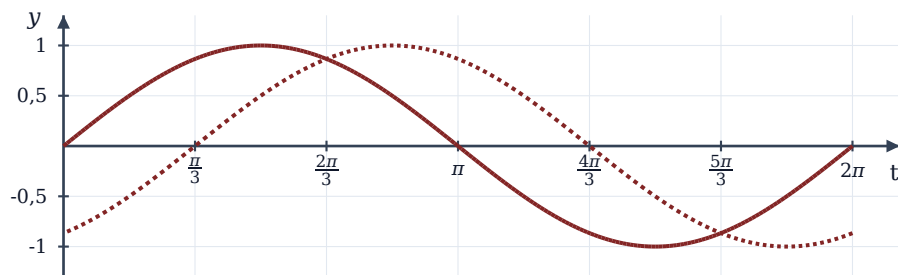


Durée du jour sur une année et seuil de 14 h

Exercice 12 – Deux signaux déphasés

On considère deux signaux $u_1(t) = \sin t$ et $u_2(t) = \sin\left(t - \frac{\pi}{3}\right)$.

- Expliquer comment passer de la courbe de u_1 à celle de u_2 .
- Déterminer les instants de $[0; 2\pi]$ où les deux signaux sont égaux.

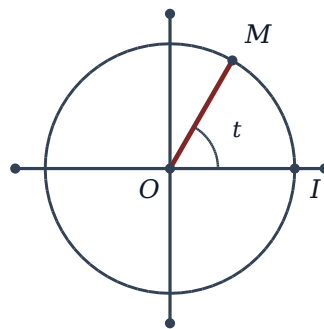


u_1 (trait plein) et u_2 (pointillé)

Exercice 13 – Mouvement circulaire

Un point M parcourt le cercle trigonométrique : à l'instant t , $M(t)$ a pour coordonnées $(\cos t; \sin t)$.

- Calculer les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{v}(t) = (x'(t); y'(t))$ et sa norme.
- Montrer que $\vec{v}(t)$ est orthogonal à $\overline{OM}$. Interpréter.

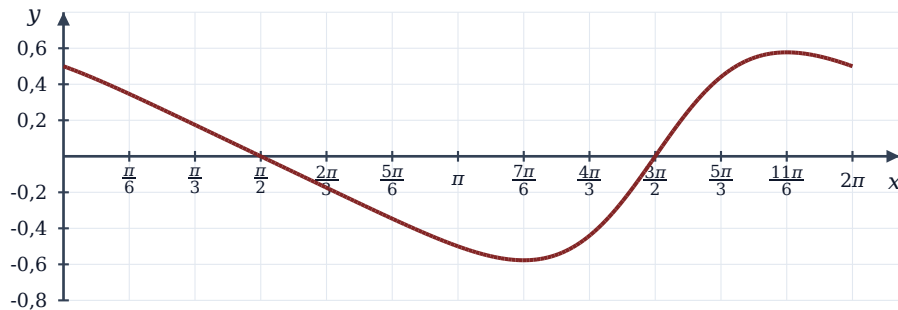


Le point $M(t)$ sur le cercle

Exercice 14 - Étude complète type bac

Soit $f(x) = \frac{\cos x}{2 + \sin x}$ sur $[0; 2\pi]$.

- Justifier que f est définie et montrer que $f'(x) = -\frac{2 \sin x + 1}{(2 + \sin x)^2}$.
- Dresser le tableau de variations de f sur $[0; 2\pi]$.
- En déduire les valeurs extrêmes de f .

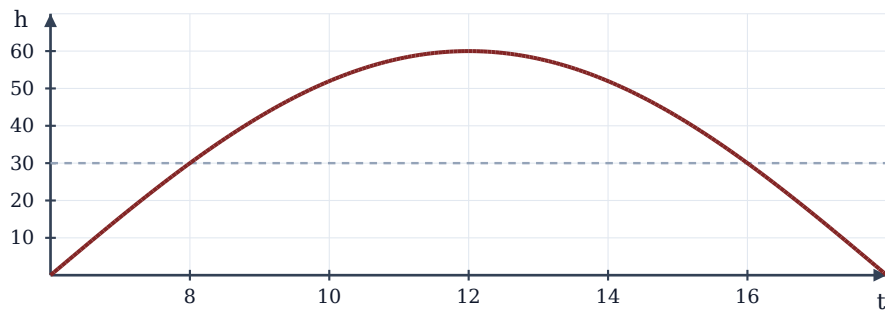


Courbe de f sur $[0; 2\pi]$

Exercice 15 - Hauteur du soleil

Un jour d'équinoxe, la hauteur du soleil au-dessus de l'horizon (en degrés) est modélisée par $h(t) = 60 \sin\left(\frac{\pi(t-6)}{12}\right)$ pour $t \in [6; 18]$ (heures).

- Quand le soleil est-il au plus haut ? Quelle est alors sa hauteur ?
- Pendant quelle plage horaire le soleil est-il à plus de 30° au-dessus de l'horizon ?
- Calculer $h'(t)$: à quelle heure le soleil monte-t-il le plus vite ?



Hauteur du soleil entre 6 h et 18 h