

Plaquette 2 - Dérivées des fonctions trigonométriques

Fonctions trigonométriques — Terminale spé maths

Exercices

Méthode

On dérive avec $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$, puis on applique les règles habituelles (somme, produit, quotient, composée). Pour une composée $\sin(u)$ ou $\cos(u)$, **le facteur u' ne doit jamais être oublié**. On exploite ensuite la dérivée : tangentes, sens de variation, vitesses et accélérations d'oscillations.

Exercice 1 - Premières dérivées

Dériver sur $\mathbb{R}$:

- a) $f(x) = 3 \sin x - 2 \cos x$
- b) $g(x) = x \sin x$
- c) $h(x) = x^2 \cos x$

Exercice 2 - Composées affines

Dériver :

- a) $f(x) = \sin(2x)$
- b) $g(x) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$
- c) $u(t) = 5 \sin(\omega t + \varphi)$, où ω et φ sont des constantes.

Exercice 3 - Puissances de sinus et cosinus

Dériver :

- a) $f(x) = \sin^2 x$
- b) $g(x) = \cos^3 x$
- c) En déduire la dérivée de $h(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$ et commenter.

Exercice 4 - Un quotient trigonométrique

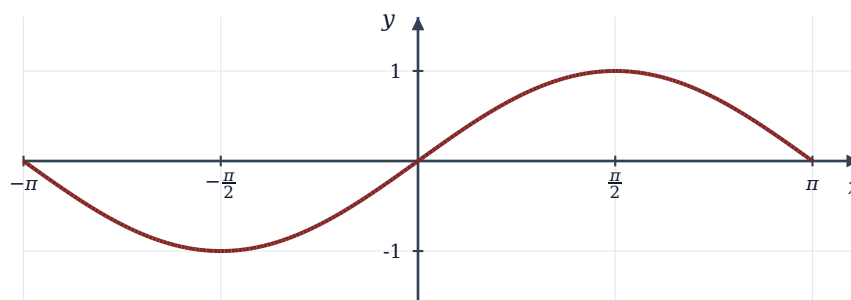
Soit $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$ sur $\mathbb{R}$.

- a) Justifier que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
- b) Montrer que $f'(x) = \frac{2 \cos x + 1}{(2 + \cos x)^2}$.

Exercice 5 - La tangente au sinus en zéro

On a tracé la courbe de la fonction sinus.

- Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe au point d'abscisse 0.
- Soit $g(x) = x - \sin x$. Étudier les variations de g sur $[0; +\infty[$ et en déduire que $\sin x \leq x$ pour $x \geq 0$.

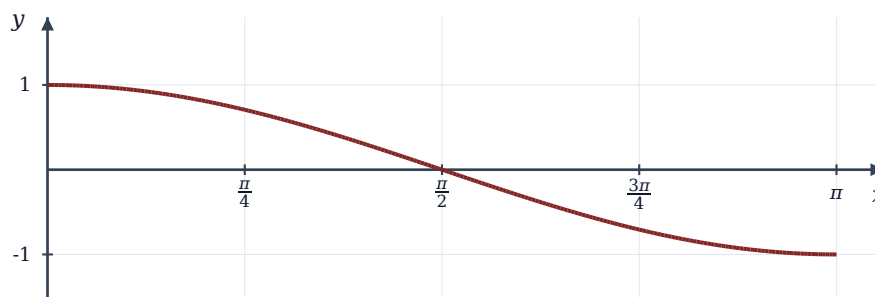


Courbe de la fonction sinus sur $[-\pi; \pi]$

Exercice 6 - La tangente au cosinus

On a tracé la courbe de la fonction cosinus sur $[0; \pi]$.

- Déterminer l'équation de la tangente T au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.
- Où T coupe-t-elle l'axe des ordonnées ? La tracer.



Courbe de la fonction cosinus sur $[0; \pi]$

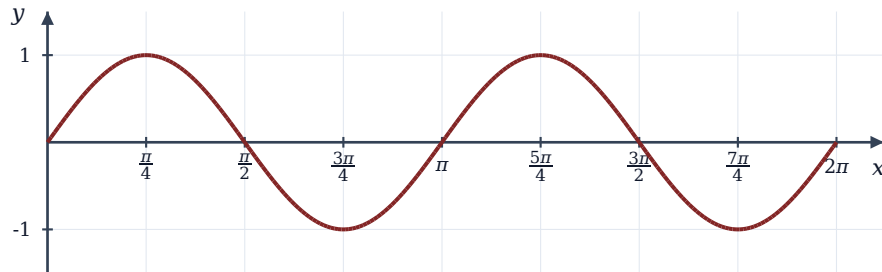
Exercice 7 - Deux limites remarquables

- En reconnaissant un nombre dérivé, déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$.
- En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{x}$.

Exercice 8 - Périodicité d'une fonction et de sa dérivée

Soit $f(x) = \sin(2x)$, dont la courbe est tracée ci-dessous.

- Montrer que f est périodique de période π .
- Calculer $f'(x)$ et vérifier que f' est aussi π -périodique.
- Lire sur la figure les abscisses des tangentes horizontales dans $[0; 2\pi]$ et les retrouver par le calcul.



Courbe de $x \mapsto \sin(2x)$

Exercice 9 - Parité et dérivée

- Rappeler la parité des fonctions sinus et cosinus.
- Soit f une fonction paire et dérivable sur $\mathbb{R}$. En dérivant l'égalité $f(-x) = f(x)$, montrer que f' est impaire.
- Vérifier ce résultat sur $f = \cos$ et sur $f(x) = x \sin x$.

Exercice 10 - L'équation des oscillations

- Calculer les dérivées secondes de $\sin$ et de $\cos$.
- Soit $y(t) = 3 \cos(2t)$. Montrer que $y'' = -4y$.
- Plus généralement, montrer que $y(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ vérifie $y'' + \omega^2 y = 0$.

Exercice 11 - Vitesse et accélération d'un ressort

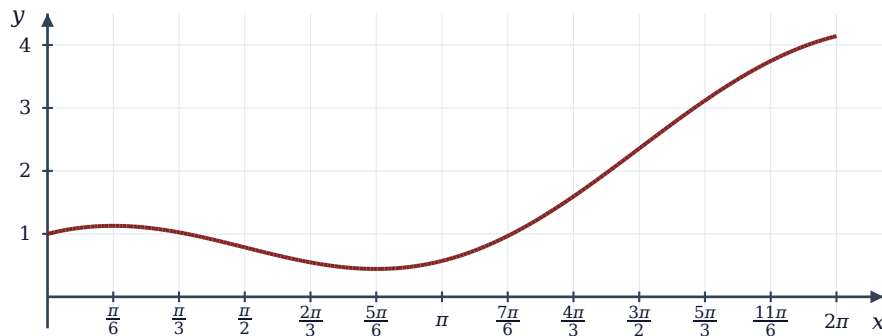
Une masse accrochée à un ressort oscille ; sa position (en cm) est $x(t) = 5 \cos(2t)$, t en secondes.

- Calculer la vitesse $v(t) = x'(t)$ et l'accélération $a(t) = v'(t)$.
- Quelle est la vitesse maximale ? À quelle position est-elle atteinte ?
- Montrer que $a(t) = -4x(t)$ et interpréter.

Exercice 12 - Variations sur un intervalle

Soit $f(x) = \cos x + \frac{x}{2}$ sur $[0; 2\pi]$, dont la courbe est tracée.

- Calculer $f'(x)$ et résoudre $f'(x) = 0$ sur $[0; 2\pi]$.
- Dresser le tableau de variations de f .

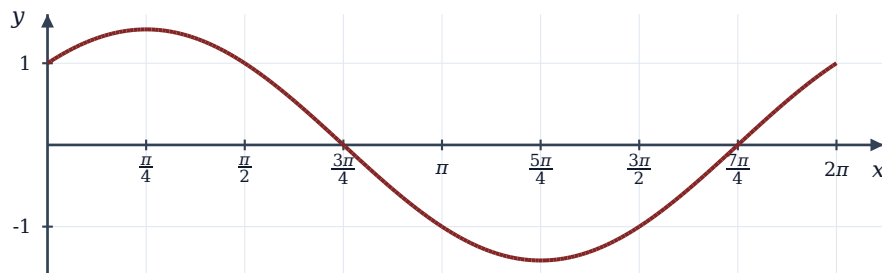


Courbe de f sur $[0; 2\pi]$

Exercice 13 - Tangentes horizontales

Soit $f(x) = \sin x + \cos x$ sur $[0; 2\pi]$.

- Calculer $f'(x)$ et déterminer les points où la tangente est horizontale.
- En déduire le maximum et le minimum de f sur $[0; 2\pi]$.



Courbe de $x \mapsto \sin x + \cos x$

Exercice 14 - Deux oublis classiques

Un élève écrit : « $[\sin(3x)]' = \cos(3x)$ » et « $[\cos x]' = \sin x$ ».

- Corriger chaque dérivée.
- Vérifier la première correction en calculant un taux d'accroissement en 0.

Exercice 15 - Cosinus d'un carré

Soit $f(x) = \cos(x^2)$.

- Calculer $f'(x)$.
- Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.