Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : équations, signaux et optimisation

Fonctions trigonométriques — Terminale spé maths

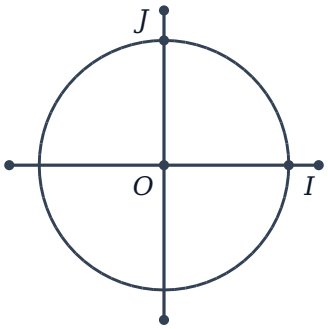
Exercices

Méthode

On résout des équations et inéquations trigonométriques sur un intervalle donné, on dérive et on étudie des fonctions périodiques, et on modélise des **signaux** ($A\sin(\omega t+\varphi)$) avec amplitude, période et déphasage.

Exercice 1 – Équation en cosinus

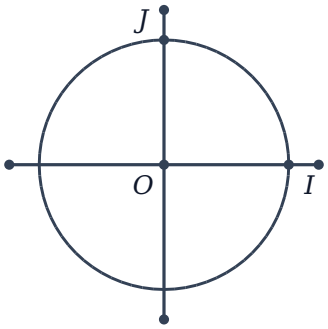
Résoudre $\cos x = \dfrac{1}{2}$ sur $[0\,;2\pi]$, puis sur $\mathbb{R}$.



Cercle trigonométrique

Exercice 2 – Équation en sinus

Résoudre $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[0\,;2\pi]$.



Cercle trigonométrique

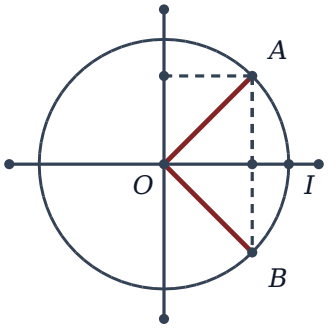
mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 3 – Équation avec argument composé

Résoudre $\cos(2x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[0\,;\pi]$.

Exercice 4 – Inéquation trigonométrique

Résoudre $\cos x \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[-\pi\,;\pi]$.



Les points d'abscisse $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 5 – Dérivées trigonométriques

Dériver :

a) $f(x) = \sin(3x - 1)$
b) $g(x) = \cos^2 x$
c) $h(x) = x \sin x$

Exercice 6 – Étude d'une fonction périodique

Étudier $f(x) = \sin x - \dfrac{x}{2}$ sur $[0\,;2\pi]$: variations et extremums.

Exercice 7 – Amplitude et forme condensée

Écrire $f(x) = \sqrt{3}\cos x + \sin x$ sous la forme $A\cos(x - \varphi)$, puis donner ses extremums.

Exercice 8 – Signal sinusoïdal

Une tension vaut $u(t) = 12\sin\left(100\pi t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ (volts, t en secondes).

a) Donner amplitude, période et fréquence.
b) Calculer $u(0)$ et le premier instant où u est maximale.

Exercice 9 – Identité trigonométrique

Démontrer que $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos(2x)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Équation avec duplication

Résoudre $\cos(2x) + \cos x = 0$ sur $[0\,;2\pi]$.

Exercice 11 – Limite trigonométrique

Calculer $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(5x)}{3x}$ et $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Exercice 12 – Optimisation avec trigonométrie

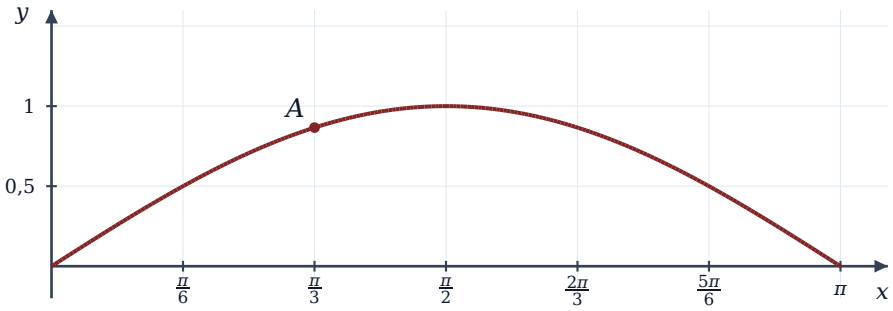
Un rectangle est inscrit dans un demi-cercle de rayon 1, sa base sur le diamètre. En notant θ l'angle repérant un sommet supérieur, exprimer l'aire et la maximiser.

Exercice 13 – Parité et périodicité

Soit $f(x) = \cos x + \cos(2x)$. Déterminer la parité et la période de f, puis $f(0)$ et $f(\pi)$.

Exercice 14 – Tangente à une courbe trigonométrique

Soit $f(x) = \sin x$. Déterminer l'équation de la tangente en $x = \dfrac{\pi}{3}$, et la position locale de la courbe.



Courbe de la fonction sinus sur $[0\,;\pi]$

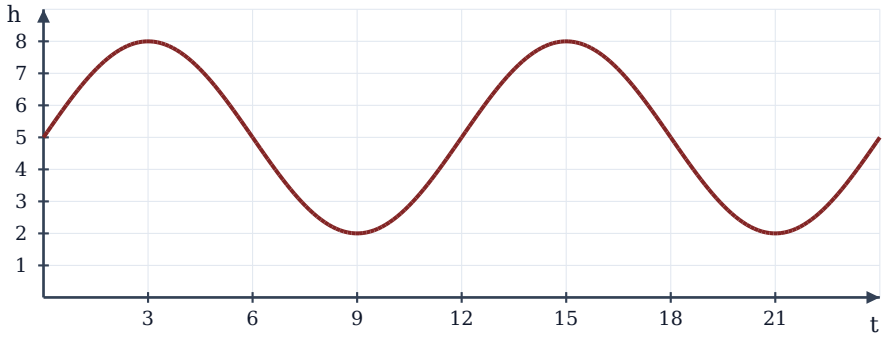
mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Modèle de marée

La hauteur d'eau vaut $h(t) = 5 + 3\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$ (mètres, t en heures).

a) Donner la période, la hauteur minimale et maximale.

b) Pendant combien d'heures par cycle a-t-on $h \geq 6{,}5$ m ?



Hauteur d'eau sur une journée

Exercice 16 – Synthèse : étude complète type bac

Soit $f(x) = 2\sin x\cos x - \cos(2x)$ sur $[0\,;\pi]$.

a) Simplifier f.

b) Étudier les variations et donner les extremums.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).