

Plaquette 1 – Valeurs remarquables et identités

Fonctions trigonométriques — Terminale spé maths

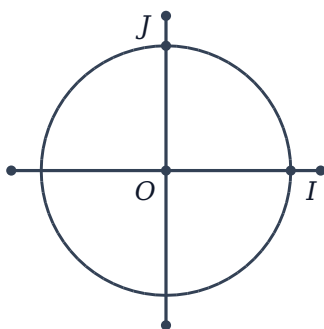
Exercices

Méthode

Tout se lit sur le **cercle trigonométrique** : le réel x repère un point M , et $\cos x$, $\sin x$ sont ses **coordonnées**. On ramène un angle à sa **mesure principale**, on utilise les **symétries** du cercle (angles associés) pour se ramener au premier quadrant, et la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ pour passer du cosinus au sinus.

Exercice 1 – Placer des points sur le cercle

Placer sur le cercle trigonométrique les points A , B , C et D associés aux réels $\frac{\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{7\pi}{6}$. Préciser pour chacun le quadrant.

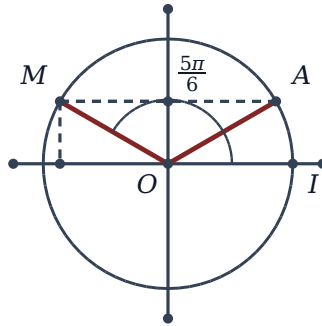


Cercle trigonométrique à compléter

Exercice 2 - Lire un cosinus et un sinus

On a placé le point M associé au réel $\frac{5\pi}{6}$ et ses projections sur les axes.

- Donner $\cos \frac{5\pi}{6}$ et $\sin \frac{5\pi}{6}$ en justifiant par une symétrie.
- Vérifier la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ pour $x = \frac{5\pi}{6}$.

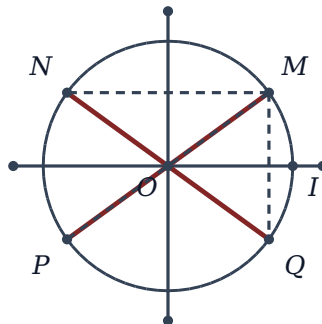


M et son symétrique A par rapport à l'axe des ordonnées

Exercice 3 - Les quatre symétriques d'un point

Soit $x = \frac{\pi}{5}$ et M le point associé. On note N , P et Q les points associés à $\pi - x$, $\pi + x$ et $-x$.

- Identifier la symétrie qui transforme M en chacun de ces points.
- En déduire $\cos(\pi - x)$, $\sin(\pi + x)$ et $\cos(-x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.



M et ses trois symétriques

Exercice 4 - Mesure principale

Déterminer la mesure principale (dans $] -\pi ; \pi]$) de :

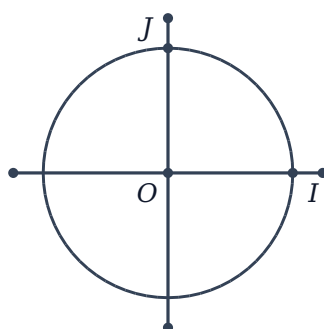
- $\frac{17\pi}{6}$
- $-\frac{11\pi}{4}$
- $\frac{31\pi}{3}$

En déduire $\cos \frac{17\pi}{6}$ et $\sin \frac{31\pi}{3}$.

Exercice 5 - Du cosinus au sinus

Soit x un réel de $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ tel que $\cos x = \frac{3}{5}$.

- Placer approximativement le point associé à x .
- Calculer $\sin x$.



Cercle trigonométrique

Exercice 6 - Une identité à démontrer

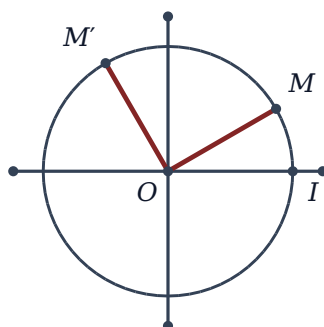
Démontrer que, pour tout réel x :

- $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2$
- $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x$

Exercice 7 - Un quart de tour

Soit x un réel, M le point associé à x et M' le point associé à $x + \frac{\pi}{2}$.

- Quelle transformation envoie M sur M' ?
- Exprimer les coordonnées de M' en fonction de $\cos x$ et $\sin x$, et en déduire $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ et $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

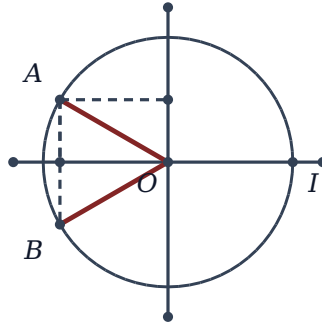


Un quart de tour autour de O (ici avec $x = \frac{\pi}{6}$)

Exercice 8 - Résoudre une équation en cosinus

Résoudre l'équation $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$:

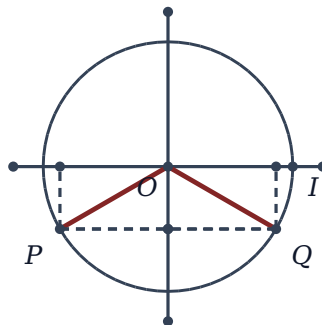
- a) dans $] -\pi ; \pi]$;
- b) dans $\mathbb{R}$.



Les points d'abscisse $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 9 - Un sinus négatif

Résoudre dans $[0 ; 2\pi[$ l'équation $\sin x = -\frac{1}{2}$.



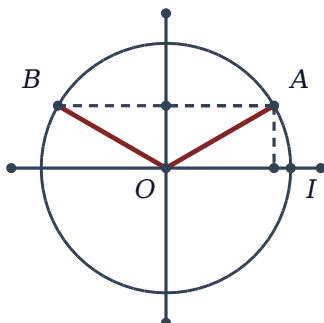
Les points d'ordonnée $-\frac{1}{2}$

Exercice 10 - Inéquations sur le cercle

Résoudre, en s'aidant du cercle trigonométrique :

a) $\cos x \geq 0$ dans $] -\pi; \pi]$;

b) $\sin x > \frac{1}{2}$ dans $[0; 2\pi[$.



L'arc des points d'ordonnée supérieure à $\frac{1}{2}$ est au-dessus de $[AB]$

Exercice 11 - Simplifier une expression

Simplifier, pour tout réel x :

a) $A = \cos(\pi - x) + \cos(\pi + x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

b) $B = \sin(-x) + \sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Exercice 12 - Sommes qui s'annulent

Sans calculatrice, calculer :

a) $S = \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5}$

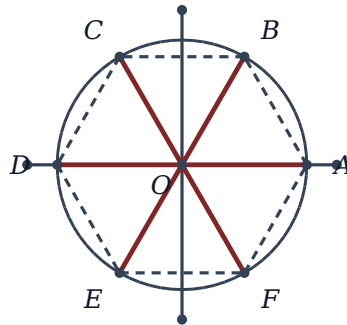
b) $T = \sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7}$

c) $U = \cos \frac{\pi}{8} + \cos \frac{3\pi}{8} + \cos \frac{5\pi}{8} + \cos \frac{7\pi}{8}$

Exercice 13 – L'hexagone régulier

Les sommets d'un hexagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique sont les points associés à 0 , $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, π , $\frac{4\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$.

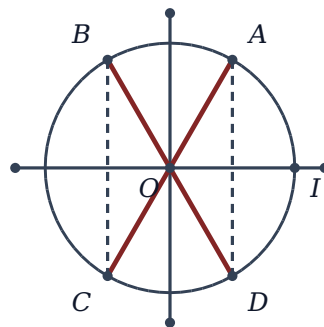
- Donner les coordonnées exactes des six sommets.
- Calculer la longueur d'un côté. Que remarque-t-on ?



Hexagone régulier inscrit dans le cercle

Exercice 14 – Quatre solutions

Résoudre dans $[0 ; 2\pi[$ l'équation $4 \cos^2 x = 1$.

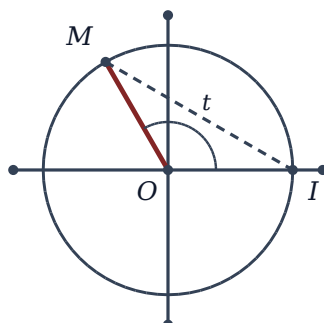


Les points d'abscisse $\frac{1}{2}$ ou $-\frac{1}{2}$

Exercice 15 – Distance entre deux points du cercle

Soit M le point du cercle trigonométrique associé à un réel t et $I(1 ; 0)$.

- Montrer que $IM^2 = 2 - 2 \cos t$.
- Pour quelles valeurs de $t \in [0 ; 2\pi[$ a-t-on $IM = 1$? Et IM maximal ?



La corde $[IM]$