

Plaquette 3 - Variations et extremums

Fonctions trigonométriques – Terminale spé maths

Exercices

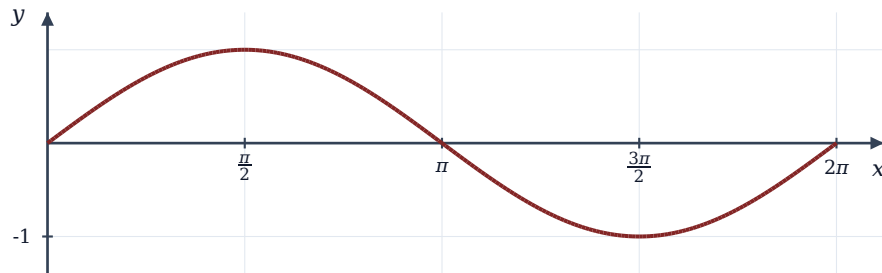
Méthode

Pour étudier une fonction trigonométrique : **1)** réduire l'intervalle d'étude grâce à la **périodicité** et à la **parité** ; **2)** dériver et **factoriser** la dérivée ; **3)** étudier le signe de chaque facteur **sur le cercle trigonométrique** ; **4)** dresser le tableau et calculer les extremums avec les valeurs remarquables.

Exercice 1 - Les variations du sinus

On a tracé la courbe de la fonction sinus sur $[0 ; 2\pi]$.

- Dresser le tableau de variations de $\sin$ sur $[0 ; 2\pi]$ en le justifiant par le signe de sa dérivée.
- En déduire le nombre de solutions de $\sin x = 0,8$ sur $[0 ; 2\pi]$.

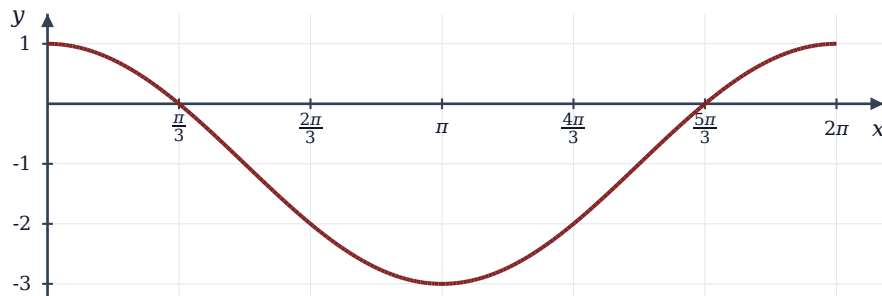


Courbe du sinus sur $[0 ; 2\pi]$

Exercice 2 - Étudier $2 \cos x - 1$

Soit $f(x) = 2 \cos x - 1$ sur $[0 ; 2\pi]$.

- Étudier les variations de f et donner ses extremums.
- Résoudre $f(x) = 0$ et $f(x) > 0$ sur $[0 ; 2\pi]$.

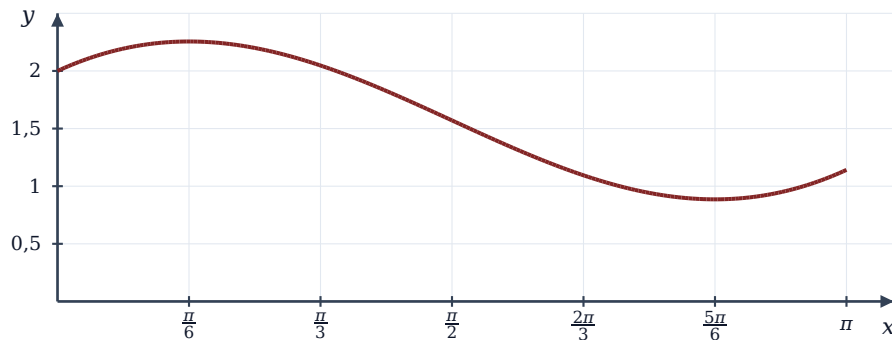


Courbe de f

Exercice 3 - Un maximum et un minimum locaux

Soit $f(x) = x + 2 \cos x$ sur $[0 ; \pi]$.

- Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
- Dresser le tableau de variations de f .



Courbe de f sur $[0 ; \pi]$

Exercice 4 - $\sin(2x)$ sur une demi-période

Soit $f(x) = \sin(2x)$ sur $[0 ; \pi]$.

- Calculer $f'(x)$ et résoudre $f'(x) = 0$ sur $[0 ; \pi]$.
- Dresser le tableau de variations de f .

Exercice 5 - Le carré du cosinus

Soit $f(x) = \cos^2 x$ sur $[0 ; \pi]$.

- Calculer $f'(x)$.
- Étudier son signe sur $[0 ; \pi]$ et dresser le tableau de variations de f .

Exercice 6 - Encadrer le cosinus

On admet que $\sin x \leq x$ pour tout $x \geq 0$.

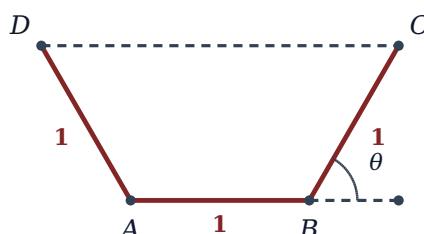
Soit $g(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$ sur $[0 ; +\infty[$.

- Calculer $g'(x)$ et montrer que $g'(x) \geq 0$.
- En déduire que $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ pour $x \geq 0$.
- Application : encadrer $\cos 0,1$.

Exercice 7 – La gouttière

On plie une plaque de largeur 3 en trois bandes de largeur 1 pour former une gouttière. Les bords font un angle $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ avec l'horizontale. La section est un trapèze de grande base $1 + 2 \cos \theta$, de petite base 1 et de hauteur $\sin \theta$.

- Montrer que l'aire de la section vaut $A(\theta) = (1 + \cos \theta) \sin \theta$.
- Montrer que $A'(\theta) = (2 \cos \theta - 1)(\cos \theta + 1)$ et trouver l'angle qui maximise le débit.



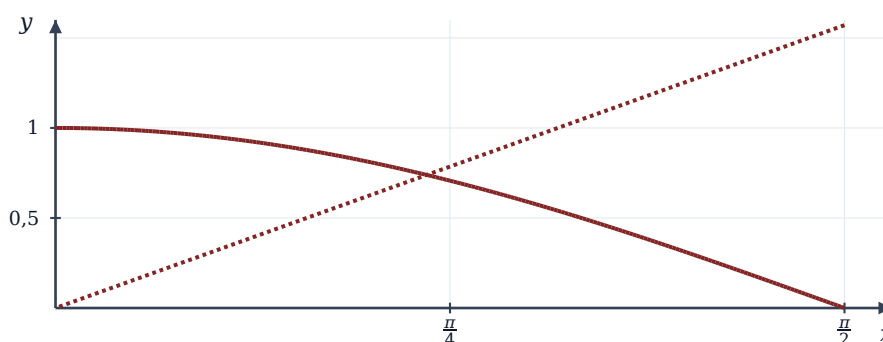
Section de la gouttière (ici $\theta = 60^\circ$)

Exercice 8 – Cosinus égal à x

On a tracé les courbes de $\cos$ et de $y = x$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Soit $g(x) = \cos x - x$.

- Étudier les variations de g sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
- Démontrer que l'équation $\cos x = x$ a une unique solution α dans cet intervalle, et l'encadrer à 0,1 près.



Courbe du cosinus (trait plein) et droite $y = x$

Exercice 9 – Une fonction positive

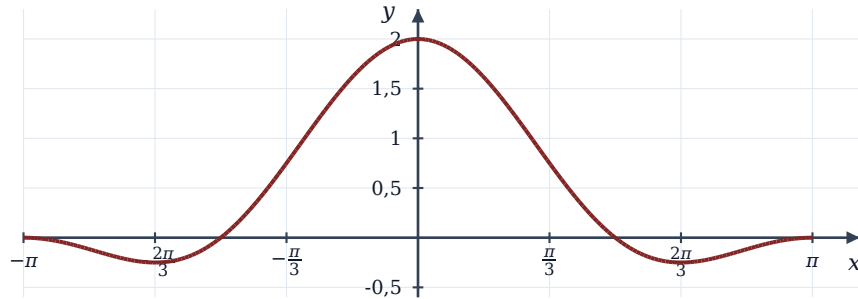
Soit $f(x) = \sin x - x \cos x$ sur $[0; \pi]$.

- Montrer que $f'(x) = x \sin x$.
- En déduire que $f(x) \geq 0$ sur $[0; \pi]$.

Exercice 10 - Réduire l'intervalle d'étude

Soit $f(x) = \cos^2 x + \cos x$ sur $\mathbb{R}$.

- Montrer que f est 2π -périodique et paire. Justifier qu'il suffit de l'étudier sur $[0; \pi]$.
- Montrer que $f'(x) = -\sin x (2 \cos x + 1)$ et dresser le tableau de variations sur $[0; \pi]$.



Courbe de f sur $[-\pi; \pi]$

Exercice 11 - Maximum d'une combinaison

Soit $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$ sur $[0; 2\pi]$.

- Montrer que $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \sqrt{3} \sin x$, et résoudre cette équation en cherchant les points du cercle qui la vérifient.
- En déduire le maximum et le minimum de f .

Exercice 12 - Une fonction strictement croissante

Soit $f(x) = x - \sin x$ sur $\mathbb{R}$.

- Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Résoudre l'équation $\sin x = x$.

Exercice 13 - Oscillations d'un pendule

L'angle (en radians) d'un pendule avec la verticale est $\theta(t) = 0,2 \cos(3t)$, t en secondes.

- Quelles sont les valeurs extrêmes de θ ? À quels instants sont-elles atteintes sur $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$?
- Calculer la vitesse angulaire $\theta'(t)$. Quand est-elle maximale en valeur absolue ?

Exercice 14 - Sinus de x sur x

Soit $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ sur $]0; \pi]$.

- Montrer que $f(x) = \frac{h(x)}{x^2}$ avec $h(x) = x \cos x - \sin x$.
- Étudier les variations de h sur $[0; \pi]$ et en déduire son signe.
- En déduire le sens de variation de f .

Exercice 15 – Un minimum sur un intervalle ouvert

Soit $f(x) = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$ sur $]0; \frac{\pi}{2}[$.

a) Montrer que $f'(x) = \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

b) En déduire que f admet un minimum, que l'on calculera.