

Plaquette 4 – Bases, repères et décompositions

Géométrie dans l'espace (vecteurs) – Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Base de l'espace. $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base si et seulement si les trois vecteurs ne sont pas coplanaires. Alors, pour tout vecteur $\vec{t}$, il existe un **unique** triplet $(x; y; z)$ tel que

$$\vec{t} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$$

Repère : $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$; les coordonnées de M sont celles de $\overrightarrow{OM}$ dans la base.

Repère orthonormé : vecteurs de norme 1, deux à deux orthogonaux. Les formules de **distance** et de **produit scalaire** en coordonnées ne sont valables que dans un tel repère ; la colinéarité, le milieu, la coplanarité se calculent dans **n'importe quel** repère.

Centre de gravité d'un tétraèdre ABCD (isobarycentre) : le point G tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$, soit

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$$

Décomposer : écrire $\vec{t} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$ en coordonnées donne un système 3×3 ; on résout par substitution, en commençant par l'équation la plus simple.

Correction de l'exercice 1 – Reconnaître une base

Il suffit de montrer que les vecteurs ne sont **pas coplanaires**. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires ; on cherche a, b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a + b \\ b \end{pmatrix}$$

- Première ligne : $a = 1$; troisième : $b = 1$.
- Deuxième : $a + b = 2 \neq 0$ ✗.

Pas de solution : les vecteurs ne sont pas coplanaires, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une **base**.

- **Rappel :** trois vecteurs coplanaires restent « à plat » ; ils ne peuvent pas engendrer tout l'espace.

Réponse. Système incompatible : non coplanaires, donc base.

Correction de l'exercice 2 – Décomposer dans une base

On écrit l'égalité coordonnée par coordonnée :

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ x + y = 3 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

- **Somme des trois lignes :** $2(x + y + z) = 6$, donc $x + y + z = 3$.
- On en déduit $y = 3 - 2 = 1$ (avec la première), $z = 3 - 3 = 0$ (avec la deuxième), $x = 3 - 1 = 2$ (avec la troisième).

$$\vec{t} = 2\vec{u} + \vec{v}$$

- **Vérification** : $2(1; 1; 0) + (0; 1; 1) = (2; 3; 1) \checkmark$
- **Coordonnées** de $\vec{t}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$: $(2; 1; 0)$.

Réponse. $\vec{t} = 2\vec{u} + \vec{v} + 0\vec{w}$.

Correction de l'exercice 3 - Coordonnées de milieux dans le cube

a) Avec $F(1; 0; 1)$, $G(1; 1; 1)$, $C(1; 1; 0)$, $D(0; 1; 0)$:

$$I\left(1; \frac{1}{2}; 1\right) \quad J\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right)$$

b) $\vec{IJ}\left(\frac{1}{2} - 1; 1 - \frac{1}{2}; 0 - 1\right) = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -1\right)$.

— Les coordonnées sont les coefficients dans la base : $\vec{IJ} = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD} - \vec{AE}$.

— **Contrôle par Chasles** : $\vec{IJ} = \vec{IG} + \vec{GC} + \vec{CJ} = \frac{1}{2}\vec{AD} - \vec{AE} - \frac{1}{2}\vec{AB} \checkmark$

Réponse. $I\left(1; \frac{1}{2}; 1\right), J\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right); \vec{IJ} = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD} - \vec{AE}$.

Correction de l'exercice 4 - Changer de repère

Les coordonnées de G dans $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ sont les coefficients de la décomposition de $\vec{OG}$:

$$\vec{OG} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$$

a) $\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE} : G(1; 1; 1)$.

b) $\vec{BG} = \vec{BC} + \vec{CG} = \vec{BC} + \vec{BF} : G(0; 1; 1)$.

c) $\vec{HG}$ est le deuxième vecteur de base : $G(0; 1; 0)$.

— **Leçon** : les coordonnées d'un point **dépendent du repère** ; seul le point ne change pas.

Réponse. a) $(1; 1; 1)$ · b) $(0; 1; 1)$ · c) $(0; 1; 0)$.

Correction de l'exercice 5 - Une famille qui n'est pas une base

a) $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$: les trois vecteurs sont **coplanaires** (tous dans la face $ABCD$), ce n'est **pas** une base.

b) En coordonnées : $\vec{AC}(1; 1; 0)$, $\vec{AF}(1; 0; 1)$, $\vec{AH}(0; 1; 1)$ — ce sont les vecteurs de l'exercice 1 (dans un autre ordre), non coplanaires : c'est une **base**.

On cherche $\vec{AG}(1; 1; 1) = x\vec{AC} + y\vec{AF} + z\vec{AH}$:

$$x + y = 1, \quad x + z = 1, \quad y + z = 1$$

— En sommant : $x + y + z = \frac{3}{2}$, d'où $x = y = z = \frac{1}{2}$.

— $\vec{AG} = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{AF} + \vec{AH})$.

Réponse. a) Non · b) oui ; $\vec{AG} = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{AF} + \vec{AH})$.

Correction de l'exercice 6 - Repère d'un tétraèdre

a) Dans ce repère, les vecteurs de base sont les arêtes issues de A :

$$A(0; 0; 0) \quad B(1; 0; 0) \quad C(0; 1; 0) \quad D(0; 0; 1)$$

— K milieu de $[CD]$: $K\left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

b) Moyenne des coordonnées de B, C, D :

$$- G_A\left(\frac{1+0+0}{3}; \frac{0+1+0}{3}; \frac{0+0+1}{3}\right) = G_A\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right).$$

— **Remarque** : ce repère n'est pas orthonormé (le tétraèdre est quelconque) ; on ne pourra pas y calculer de longueurs, mais milieux et centres de gravité se calculent normalement.

Réponse. $K\left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ et $G_A\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Correction de l'exercice 7 - Alignement grâce à un repère

Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$: $C(1; 1; 0)$, $F(1; 0; 1)$, $H(0; 1; 1)$, donc

$$K\left(\frac{1+1+0}{3}; \frac{1+0+1}{3}; \frac{0+1+1}{3}\right) = K\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$$

$$- \overrightarrow{AK}\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG}, \text{ puisque } \overrightarrow{AG}(1; 1; 1).$$

Les vecteurs sont colinéaires : A, K, G sont **alignés**, et K est aux **deux tiers** de $[AG]$ en partant de A .

— **Avec l'exercice sur BDE** : la diagonale $[AG]$ est coupée en trois segments égaux par les triangles BDE et CFH .

Réponse. $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG}$: alignés, K aux deux tiers.

Correction de l'exercice 8 - Pourquoi exiger un repère orthonormé ?

a) $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$, donc $G(1; 1; 1)$ dans ce repère.

b) Le repère n'est **pas orthonormé** : les vecteurs de base ont pour longueurs 3, 2 et 1. La formule

$$AG = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

ne s'applique qu'en repère orthonormé.

— **Vraie longueur** : dans le repère orthonormé adapté, $G(3; 2; 1)$, donc $AG = \sqrt{9 + 4 + 1} = \sqrt{14} \approx 3,74$.

— **À retenir** : milieux, colinéarité, coplanarité se calculent dans **tout** repère ; distances et angles demandent un repère **orthonormé**.

Réponse. a) $G(1; 1; 1)$ · b) repère non orthonormé ; $AG = \sqrt{14}$.

Correction de l'exercice 9 - Décomposition dans une pyramide

a) Soit O le centre du parallélogramme, milieu commun de $[AC]$ et $[BD]$. Avec Chasles :

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{SO}$$

car $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$. De même $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO}$. D'où l'égalité.

b) On isole $\overrightarrow{SC}$:

$$- \overrightarrow{SC} = -\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}.$$

Coordonnées de $\overrightarrow{SC}$ dans la base : $(-1; 1; 1)$.

— **Base ?** $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SD}$ ne sont pas coplanaires (S n'est pas dans le plan de la base), c'est bien une base.

Réponse. $\overrightarrow{SC} = -\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$.

Correction de l'exercice 10 - Le centre de gravité du tétraèdre

a) On fait apparaître A dans chaque vecteur : $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}$, etc.

$$\overrightarrow{GA} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AD}) = \vec{0}$$

— Soit $4\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$, donc $4\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.

b) Les coordonnées de $\overrightarrow{AG}$ sont les coefficients :

— $G\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$.

— **Remarque** : c'est la moyenne des coordonnées des quatre sommets $(0; 0; 0)$, $(1; 0; 0)$, $(0; 1; 0)$, $(0; 0; 1)$.

Réponse. $G\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$.

Correction de l'exercice 11 - Colinéarité dans un repère quelconque

Coordonnées : $M\left(\frac{1}{3}; 0; 0\right)$; $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$, donc $N\left(0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

$$\overrightarrow{MN}\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$$

Le plan (BCD) est dirigé par $\overrightarrow{BC}(-1; 1; 0)$ et $\overrightarrow{BD}(-1; 0; 1)$. On cherche $\overrightarrow{MN} = a\overrightarrow{BC} + b\overrightarrow{BD}$:

— deuxième coordonnée : $a = \frac{1}{3}$; troisième : $b = \frac{2}{3}$;

— première : $-a - b = -1 \neq -\frac{1}{3}$ ✗.

(MN) **n'est pas** parallèle au plan (BCD) : elle le coupe.

— **À retenir** : ce calcul n'utilise aucune longueur ; il est valable dans ce repère non orthonormé.

Réponse. $\overrightarrow{MN}\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$: (MN) n'est pas parallèle à (BCD) .

Correction de l'exercice 12 - Milieux d'arêtes opposées

a) Avec $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $C(0; 1; 0)$, $D(0; 0; 1)$:

$$I\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right) \quad J\left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \quad M\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$$

b) Le centre de gravité du tétraèdre est $G\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$: $M = G$.

— **Conséquence** : les trois segments joignant les milieux des arêtes opposées ($[AB]$ et $[CD]$, $[AC]$ et $[BD]$, $[AD]$ et $[BC]$) se coupent tous en leur milieu, au centre de gravité G .

— **Méthode** : un repère « naturel » du solide rend ces preuves presque immédiates.

Réponse. $M\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right) = G$.

Correction de l'exercice 13 - Une base selon un paramètre

Ils forment une base si et seulement s'ils ne sont **pas coplanaires**. Cherchons quand ils le sont : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont jamais colinéaires ; on résout $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ am + b \end{pmatrix}$$

— $a = 1$, $b = 1$, et la troisième ligne donne $m + 1 = 2$, soit $m = 1$.

Les vecteurs sont coplanaires **seulement** pour $m = 1$ (alors $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$).

Conclusion : $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base si et seulement si $m \neq 1$.

Réponse. Base si et seulement si $m \neq 1$.

Correction de l'exercice 14 - Un système trois fois trois

a) Si $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$, la première coordonnée donne $a = 0$, puis la deuxième $b = 0$, puis la troisième $c = 0$: aucun des vecteurs n'est combinaison des autres, ils ne sont pas coplanaires. C'est une **base**.

b) On résout $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{t}$:

$$\begin{cases} x = 2 \\ x + y = 5 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$$

— Système **triangulaire** : $x = 2$, puis $y = 3$, puis $z = 4 - 5 = -1$.

— $\vec{t} = 2\vec{u} + 3\vec{v} - \vec{w}$.

— **Vérification** : $(2; 2; 2) + (0; 3; 3) - (0; 0; 1) = (2; 5; 4) \checkmark$

Réponse. $\vec{t} = 2\vec{u} + 3\vec{v} - \vec{w}$.

Correction de l'exercice 15 - Les médianes du tétraèdre

On a vu que $G_A\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ (moyenne de B, C, D). Donc

$$\overrightarrow{AG_A}\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) \quad \overrightarrow{AG}\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$$

— $\frac{1}{4} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$: $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG_A}$.

— Les vecteurs sont colinéaires : $G \in (AG_A)$, aux **trois quarts** de $[AG_A]$ en partant du sommet.

— **Généralisation** : les quatre « médianes » d'un tétraèdre (segments joignant un sommet au centre de gravité de la face opposée) sont **concourantes** en G — comme les trois médianes d'un triangle, avec un rapport $\frac{3}{4}$ au lieu de $\frac{2}{3}$.

Réponse. $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG_A}$: G est sur la médiane, aux trois quarts.