

Plaquette 2 - Colinéarité et parallélisme

Géométrie dans l'espace (vecteurs) — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Colinéarité. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (avec $\vec{u} \neq \vec{0}$) sont colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

En coordonnées : $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont **proportionnelles** :

$$\vec{v} = k\vec{u} \Leftrightarrow x' = kx, y' = ky, z' = kz$$

⚠ Dans l'espace, il faut vérifier **les trois** coordonnées (le « déterminant » $xy' - x'y$ du plan ne suffit plus).

Alignement : A, B, C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Parallélisme : (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Droite de l'espace : la droite passant par A , de vecteur directeur $\vec{u}$, est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}, t \in \mathbb{R}$.

Théorème des milieux : si I et J sont les milieux de $[AB]$ et $[AC]$, alors $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Correction de l'exercice 1 - Tester la colinéarité

On cherche k sur une coordonnée non nulle, puis on **vérifie** les autres :

$$\vec{v} = k\vec{u} \Leftrightarrow x' = kx, y' = ky, z' = kz$$

a) Première coordonnée : $-4 = k \times 2$, donc $k = -2$. Vérification : $-2 \times (-1) = 2 \checkmark$ et $-2 \times 3 = -6 \checkmark$. **Colinéaires** : $\vec{v} = -2\vec{u}$.

b) $6 = 2k$ donne $k = 3$; $3 \times (-1) = -3 \checkmark$ mais $3 \times 3 = 9 \neq 8 \times$. **Non colinéaires**.

c) Première coordonnée nulle des deux côtés, sans information. Deuxième : $-0,8 = 2k$, $k = -0,4$; troisième : $-0,4 \times (-5) = 2 \checkmark$. **Colinéaires**.

— **Piège en b)** : deux coordonnées proportionnelles ne suffisent pas dans l'espace.

Réponse. a) Oui ($k = -2$) · b) Non · c) Oui ($k = -0,4$).

Correction de l'exercice 2 - Rendre deux vecteurs colinéaires

On détermine k à l'aide des coordonnées **sans paramètre**, puis on en déduit m :

$$\vec{v} = k\vec{u} \Leftrightarrow 6 = km, 4 = 2k, -2 = -k$$

— $4 = 2k$ donne $k = 2$; la troisième équation, $-2 = -2$, est vérifiée $\checkmark$

— La première donne alors $6 = 2m$, soit $m = 3$.

Vérification : $\vec{u}(3; 2; -1)$ et $\vec{v} = 2\vec{u} \checkmark$

— **Méthode** : ne jamais diviser par m au début (il pourrait être nul) ; on commence par les coordonnées connues.

Réponse. $m = 3$.

Correction de l'exercice 3 - Trois points alignés ?

Trois points sont alignés si et seulement si

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

a) $\overrightarrow{AB}(1; 2; 4)$ et $\overrightarrow{AC}(3; 6; 12)$: on a $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$ (les trois coordonnées sont multipliées par 3). Les points sont **alignés**, et B est au tiers de $[AC]$ en partant de A .

b) $\overrightarrow{DE}(1; -1; -1)$ et $\overrightarrow{DF}(3; 0; -2)$.

— Première coordonnée : $k = 3$; deuxième : $3 \times (-1) = -3 \neq 0$ ✗.

— Les points ne sont **pas alignés** : ils définissent un plan.

Réponse. a) Alignés ($\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$) · b) Non alignés.

Correction de l'exercice 4 - Deux droites parallèles

a) On compare les vecteurs directeurs :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} = -2\overrightarrow{AB}$$

Les vecteurs sont colinéaires : $(AB) \parallel (CD)$.

b) Elles sont confondues si $C \in (AB)$, c'est-à-dire si $\overrightarrow{AC}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

— $\overrightarrow{AC}(-1; 4; -1)$: première coordonnée $k = -\frac{1}{2}$, deuxième $-\frac{1}{2} \times 1 = -\frac{1}{2} \neq 4$ ✗.

— $C \notin (AB)$: les droites sont **strictement parallèles**.

Réponse. a) $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$ · b) non, strictement parallèles.

Correction de l'exercice 5 - Diagonales parallèles dans un cube

a) Relation de Chasles, puis vecteurs égaux dans le cube :

$$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC}$$

(car $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE}$).

b) $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$ signifie que $ACGE$ est un **parallélogramme**. Comme (AE) est perpendiculaire à la face $ABCD$, c'est même un **rectangle**.

— Les droites (AC) et (EG) sont **parallèles** (vecteurs directeurs égaux) et distinctes.

— **En coordonnées** : $\overrightarrow{AC}(1; 1; 0)$ et $\overrightarrow{EG} = (1 - 0; 1 - 0; 1 - 1) = (1; 1; 0)$ ✓

Réponse. $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$: $ACGE$ est un rectangle, $(AC) \parallel (EG)$.

Correction de l'exercice 6 - Théorème des milieux dans le cube

a) Relation de Chasles et milieux :

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

b) On a vu que $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$ (face du haut « au-dessus » de la face du bas). Donc

— $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EG}$: les vecteurs sont colinéaires, $(IJ) \parallel (EG)$.

— **Conséquence** : $IJGE$ est un **trapeze** (deux côtés parallèles de longueurs différentes), donc ses quatre sommets sont dans un même plan.

— **En coordonnées** : $I\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right), J\left(1; \frac{1}{2}; 0\right), \overrightarrow{IJ}\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$ ✓

Réponse. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EG}$: $(IJ) \parallel (EG)$.

Correction de l'exercice 7 - Reconnaître un parallélogramme

a) $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

— $\overrightarrow{AB}(2; 1; 3)$ et $\overrightarrow{DC}(3 - 1; 5 - 4; 4 - 1) = (2; 1; 3) \checkmark$

b) Un parallélogramme est un losange si deux côtés consécutifs ont la même longueur (repère supposé orthonormé) :

— $AB = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}$;

— $\overrightarrow{AD}(-1; 3; 1)$, $AD = \sqrt{1 + 9 + 1} = \sqrt{11}$.

$AB \neq AD$: ce n'est **pas** un losange.

— **Remarque** : quatre points de l'espace formant un parallélogramme sont automatiquement **coplanaires**.

Réponse. a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ · b) non ($AB = \sqrt{14}$, $AD = \sqrt{11}$).

Correction de l'exercice 8 - Un point sur une droite

Un point M est sur (AB) si et seulement si $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ pour un réel t . Ici $\overrightarrow{AB}(2; 2; 4)$.

a) $\overrightarrow{AC}(3; 3; 6)$: $3 = 2t$ donne $t = \frac{3}{2}$; puis $\frac{3}{2} \times 2 = 3 \checkmark$ et $\frac{3}{2} \times 4 = 6 \checkmark$.

$C \in (AB)$, avec $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

b) $M = A + t\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(1 + 2t; -2 + 2t; 4t)$.

$$4t = 10 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2}$$

— $M(1 + 5; -2 + 5; 10) = M(6; 3; 10)$.

Réponse. a) Oui ($t = \frac{3}{2}$) · b) $M(6; 3; 10)$.

Correction de l'exercice 9 - Un trapèze dans le cube

a) Dans le triangle EFG , le théorème des milieux donne $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EG}$, et $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$. Donc

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

b) $(IJ) \parallel (AC)$ et $IJ = \frac{1}{2}AC \neq AC$: $ACJI$ est un **trapèze** de bases $[AC]$ et $[IJ]$.

— **Isocèle ?** Les côtés $[AI]$ et $[CJ]$ ont la même longueur, par symétrie du cube par rapport au plan $(BFHD)$; c'est un trapèze isocèle.

— **En coordonnées** : $I\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$, $J\left(1; \frac{1}{2}; 1\right)$, $\overrightarrow{IJ}\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \checkmark$

Réponse. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$: $ACJI$ est un trapèze.

Correction de l'exercice 10 - Milieux dans un tétraèdre

a) **Théorème des milieux** dans les triangles ABC et DBC :

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \quad \overrightarrow{LK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

(Par exemple $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.)

b) $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$: le quadrilatère $IJKL$ est un **parallélogramme**.

- **Conséquence surprenante** : les quatre points I, J, K, L , pris sur quatre arêtes d'un tétraèdre quelconque, sont toujours **coplanaires**.
- De même, $\overrightarrow{JK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{IL}$.

Réponse. $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$: $IJKL$ est un parallélogramme.

Correction de l'exercice 11 - Une droite parallèle à une diagonale

Relation de Chasles, en passant par A et C :

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CG}$$

- Or $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE}$: les deux termes extrêmes s'annulent.
- Donc $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC}$: $(MN) \parallel (AC)$, et même $ACNM$ est un parallélogramme.
- **En coordonnées** : $M\left(0; 0; \frac{1}{3}\right)$, $N\left(1; 1; \frac{1}{3}\right)$, $\overrightarrow{MN}(1; 1; 0) = \overrightarrow{AC}$ ✓
- **Intérêt** : on montre un parallélisme sans aucun repère, uniquement par Chasles.

Réponse. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC}$: $(MN) \parallel (AC)$.

Correction de l'exercice 12 - Construire un point

a) $\overrightarrow{BC}(-2; 4; -4)$, donc $2\overrightarrow{BC}(-4; 8; -8)$. Et $\overrightarrow{AD}(x_D - 1; y_D - 1; z_D - 1)$:

$$x_D = -3, \quad y_D = 9, \quad z_D = -7$$

soit $D(-3; 9; -7)$.

b) Par construction, $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$: les vecteurs directeurs sont colinéaires, donc $(AD) \parallel (BC)$.

- Elles ne sont pas confondues : $\overrightarrow{BA}(-1; 1; -2)$ n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{BC}$ ($k = \frac{1}{2}$ sur la première coordonnée, mais $\frac{1}{2} \times 4 = 2 \neq 1$).
- **Conséquence** : $ADCB$ est un **trapèze** (côtés $[AD]$ et $[BC]$ parallèles, $AD = 2BC$).

Réponse. a) $D(-3; 9; -7)$ · b) oui, parallèles et distinctes.

Correction de l'exercice 13 - Trouver le paramètre d'alignement

Il faut $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires, avec

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ k \\ 4 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- Sur les coordonnées sans paramètre : $\frac{3}{2}$ et $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$; on doit avoir $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.
- Deuxième coordonnée : $3 = \frac{3}{2}k \Leftrightarrow k = 2$.

Vérification : $\overrightarrow{AB}(2; 2; 4)$ et $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ ✓

- **Remarque** : si les coordonnées sans paramètre n'avaient pas donné le même rapport, aucune valeur de k n'aurait convenu.

Réponse. $k = 2$.

Correction de l'exercice 14 - Parallélisme dans une pyramide

a) **Théorème des milieux** dans les triangles SAB et SBC :

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad \overrightarrow{NP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

Donc $(MN) \parallel (AB)$ et $(NP) \parallel (BC)$.

b) Le plan (MNP) contient deux droites sécantes (MN) et (NP) , respectivement parallèles aux droites sécantes (AB) et (BC) du plan (ABC) .

- Les deux plans sont donc **parallèles** : le plan (MNP) coupe la pyramide selon un carré « à mi-hauteur », réduction de rapport $\frac{1}{2}$ de la base.
- **Critère** : deux plans sont parallèles dès que deux droites sécantes de l'un sont parallèles à deux droites de l'autre.

Réponse. $(MN) \parallel (AB)$, $(NP) \parallel (BC)$: les plans (MNP) et (ABC) sont parallèles.

Correction de l'exercice 15 - Vecteur directeur et longueurs

a) $\|\vec{u}\| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3.$

b) Un vecteur colinéaire s'écrit $k\vec{u}$, de norme $|k| \times 3$:

$$|k| \times 3 = 1 \Leftrightarrow k = \pm \frac{1}{3}$$

— Vecteurs unitaires : $\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ et son opposé.

c) $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ avec $AM = 3|t| = 6$, donc $t = \pm 2$.

— L'abscisse de M vaut $1 + 2t$; elle dépasse celle de A si $t > 0$: $t = 2$.

— $M(1 + 4; 1 - 2; 1 + 4) = M(5; -1; 5).$

— **Contrôle** : $\overrightarrow{AM}(4; -2; 4)$, de norme $\sqrt{16 + 4 + 16} = 6 \checkmark$

Réponse. a) 3 · b) $\pm \frac{1}{3}\vec{u}$ · c) $M(5; -1; 5).$