

Plaquette 3 – Coplanarité et plans

Géométrie dans l'espace (vecteurs) — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Vecteurs coplanaires. $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ (avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires) sont coplanaires si et seulement s'il existe des réels a et b tels que

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

Points coplanaires : A, B, C, D sont coplanaires si et seulement si $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Plan défini par un point et deux vecteurs : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, le plan passant par A et dirigé par $\vec{u}, \vec{v}$ est l'ensemble des points M tels que

$$\overrightarrow{AM} = s\vec{u} + t\vec{v}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Droite parallèle à un plan : une droite de vecteur directeur $\vec{w}$ est parallèle au plan dirigé par $\vec{u}, \vec{v}$ si et seulement si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires.

Plans parallèles : deux plans sont parallèles si deux vecteurs non colinéaires de l'un dirigent aussi l'autre.

Droites coplanaires : deux droites de l'espace sont soit coplanaires (sécantes ou parallèles), soit **non coplanaires** — elles ne se coupent pas sans être parallèles.

Correction de l'exercice 1 – Trois vecteurs coplanaires

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires (le premier a une ordonnée nulle, pas le second). On cherche a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a + b \end{pmatrix}$$

— Les deux premières lignes donnent $a = 2$ et $b = 3$.

— **Vérification** sur la troisième : $a + b = 5$ ✓

Donc $\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$: les trois vecteurs sont **coplanaires**.

— **Méthode** : deux équations pour trouver a et b , la troisième pour **vérifier** ; si elle est fausse, les vecteurs ne sont pas coplanaires.

Réponse. $\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$: coplanaires.

Correction de l'exercice 2 – Trois vecteurs non coplanaires

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. On cherche a, b avec $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$:

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

— La première et la troisième donnent $a = 1$ et $b = 1$.

— La deuxième devient $2 + 1 = 3 \neq 1$ ✗.

Le système n'a **pas de solution** : $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ne sont **pas coplanaires**.

— **Conséquence** : ces trois vecteurs forment une **base** de l'espace ; tout vecteur s'écrit de façon unique à l'aide d'eux.

Réponse. Non : le système est incompatible.

Correction de l'exercice 3 - Quatre points coplanaires

On teste la coplanarité des vecteurs issus de A :

$$\overrightarrow{AB}(1; 0; 1) \quad \overrightarrow{AC}(0; 1; 1) \quad \overrightarrow{AD}(1; 1; 2)$$

— On cherche $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$: $a = 1$, $b = 1$, et la troisième coordonnée $1 + 1 = 2$ ✓

— Donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$: les points sont **coplanaires**.

Nature : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ est la règle du parallélogramme : $ABDC$ est un **parallélogramme**. Comme $AB = AC = \sqrt{2}$ (repère orthonormé), c'est même un **losange**.

Réponse. Coplanaires ; $ABDC$ est un losange.

Correction de l'exercice 4 - Un tétraèdre caché dans le cube

Coordonnées : $B(1; 0; 0)$, $D(0; 1; 0)$, $E(0; 0; 1)$, $G(1; 1; 1)$. Vecteurs issus de B :

$$\overrightarrow{BD}(-1; 1; 0) \quad \overrightarrow{BE}(-1; 0; 1) \quad \overrightarrow{BG}(0; 1; 1)$$

— On cherche $\overrightarrow{BG} = a\overrightarrow{BD} + b\overrightarrow{BE}$: la deuxième coordonnée donne $a = 1$, la troisième $b = 1$.

— Première coordonnée : $-a - b = -2 \neq 0$ ✗.

Les points **ne sont pas coplanaires** : $BDEG$ est un tétraèdre.

— **Culture** : ses six arêtes sont des diagonales de faces du cube, toutes de longueur $\sqrt{2}$: c'est un **tétraèdre régulier** inscrit dans le cube.

Réponse. Non : $BDEG$ est un tétraèdre (régulier).

Correction de l'exercice 5 - Un rectangle dans le cube

Coplanarité : par la règle du parallélépipède et $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE}$,

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$$

$\overrightarrow{AG}$ est combinaison de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$: A, C, G, E sont **coplanaires**, et $ACGE$ est un parallélogramme (même un rectangle).

Droites (AG) et (CE) : ce sont les **diagonales** du parallélogramme $ACGE$. Elles sont coplanaires et non parallèles, donc **sécantes**, en leur milieu commun.

— Ce milieu est $O\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, le **centre du cube**.

— **Généralisation** : les quatre grandes diagonales du cube se coupent toutes en O .

Réponse. $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$; (AG) et (CE) se coupent au centre du cube.

Correction de l'exercice 6 - Un point dans un plan

$M \in P$ si et seulement s'il existe s, t tels que

$$\overrightarrow{AM} = s\vec{u} + t\vec{v} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ 2s - t \end{pmatrix}$$

a) $\overrightarrow{AM}(2; -1; 5)$: $s = 2$, $t = -1$, et la troisième coordonnée vaut $2 \times 2 - (-1) = 5$ ✓. Donc $M \in P$.

b) $\overrightarrow{AN}(1; 2; 1) : s = 1, t = 2$, mais $2 \times 1 - 2 = 0 \neq 1$ ✗. Donc $N \notin P$.

— **Interprétation** : s et t sont les « coordonnées » du point **dans le plan**, rapportées au repère $(A; \vec{u}, \vec{v})$.

Réponse. a) $M \in P$ ($s = 2, t = -1$) · b) $N \notin P$.

Correction de l'exercice 7 - Deux plans parallèles dans le cube

On cherche deux vecteurs non colinéaires qui dirigent **les deux** plans. Avec les coordonnées du repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$:

— $\overrightarrow{BD}(-1; 1; 0)$ et $\overrightarrow{BE}(-1; 0; 1)$ dirigent (BDE) ;

— $\overrightarrow{FH} = (0 - 1; 1 - 0; 1 - 1) = (-1; 1; 0) = \overrightarrow{BD}$;

— $\overrightarrow{CH} = (0 - 1; 1 - 1; 1 - 0) = (-1; 0; 1) = \overrightarrow{BE}$.

$$\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{BD} \quad \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{BE}$$

Le plan (CFH) est dirigé par les mêmes vecteurs non colinéaires : les plans sont **parallèles** (et distincts, car $C \notin (BDE)$).

— **Culture** : la grande diagonale (AG) est perpendiculaire à ces deux plans et les coupe aux tiers de $[AG]$.

Réponse. $\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{BE}$: plans parallèles.

Correction de l'exercice 8 - Droite parallèle à un plan

Coordonnées : $I(0; \frac{1}{2}; 1)$ et $J(1; \frac{1}{2}; 1)$, donc

$$\overrightarrow{IJ}(1; 0; 0) = \overrightarrow{AB}$$

a) Le plan (ABC) est dirigé par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$. Comme $\overrightarrow{IJ} = 1 \times \overrightarrow{AB} + 0 \times \overrightarrow{AD}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{IJ}$ sont coplanaires : (IJ) est **parallèle** au plan (ABC) (elle est dans le plan du haut, qui lui est parallèle).

b) Oui : $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB}$, les droites (IJ) et (AB) sont **parallèles** (et $ABJI$ est un rectangle).

— **Remarque** : une droite parallèle à un plan est parallèle à **au moins une** droite de ce plan.

Réponse. $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} : (IJ) \parallel (ABC)$ et $(IJ) \parallel (AB)$.

Correction de l'exercice 9 - Compléter un point dans un plan

$D \in (ABC)$ si et seulement si $\overrightarrow{AD} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$, avec $\overrightarrow{AB}(-1; 1; 0)$ et $\overrightarrow{AC}(-1; 0; 1)$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s - t \\ s \\ t \end{pmatrix}$$

— Deuxième ligne : $s = 2$; première : $-2 - t = 0$, donc $t = -2$.

— Troisième : $c = t = -2$.

Le point $D(1; 2; -2)$ appartient au plan.

— **Contrôle** : on remarque que A, B, C vérifient $x + y + z = 1$, et D aussi : $1 + 2 - 2 = 1$ ✓ (c'est l'**équation cartésienne** du plan, vue au chapitre suivant).

Réponse. $c = -2$.

Correction de l'exercice 10 - Le segment des milieux dans un tétraèdre

a) On décompose $\overrightarrow{IJ}$ de deux façons avec Chasles :

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CJ} \quad \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DJ}$$

— En additionnant : $2\overrightarrow{IJ} = (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + (\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{DJ})$.

— I milieu de $[AB]$: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$; de même $\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{DJ} = \vec{0}$.

— Donc $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

b) $\overrightarrow{IJ}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$: les trois vecteurs sont **coplanaires**.

— **Attention** : cela ne veut pas dire que les droites (IJ) , (AC) , (BD) sont dans un même plan — seulement que leurs **directions** le sont.

Réponse. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$: vecteurs coplanaires.

Correction de l'exercice 11 - Coplanarité dans une pyramide

a) **Théorème des milieux** dans le triangle SAC :

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

b) M, N, A, C : $(MN) \parallel (AC)$, deux droites parallèles sont coplanaires, donc ces quatre points sont **coplanaires** ($AMNC$ est un trapèze).

M, N, B, D : on cherche si $\overrightarrow{BM}$ est combinaison de $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Or $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ dirigent le plan de la base, horizontal ; $\overrightarrow{BM}$ « monte » (la cote de M est non nulle) et ne peut pas être dans ce plan vectoriel.

— Donc M, N, B, D ne sont **pas** coplanaires.

Réponse. a) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ · b) M, N, A, C coplanaires ; M, N, B, D non.

Correction de l'exercice 12 - Coplanarité avec paramètre

On cherche a, b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ m \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2a + b \\ b \end{pmatrix}$$

— Première ligne : $a = 2$; troisième : $b = -1$.

— Deuxième : $m = 2 \times 2 + (-1) = 3$.

Les vecteurs sont coplanaires si et seulement si $m = 3$; on a alors $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$.

— **Vérification** : $2\vec{u} - \vec{v} = (2; 4 - 1; 0 - 1) = (2; 3; -1) \checkmark$

— Pour toute autre valeur de m , $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace.

Réponse. $m = 3$.

Correction de l'exercice 13 - Un point dans un plan du cube

Coordonnées : $I\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right), J\left(1; \frac{1}{2}; 0\right), F(1; 0; 1)$. Vecteurs issus de F :

$$\overrightarrow{FI}\left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right) \quad \overrightarrow{FJ}\left(0; \frac{1}{2}; -1\right) \quad \overrightarrow{FK}\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$$

On cherche $\overrightarrow{FK} = a\overrightarrow{FI} + b\overrightarrow{FJ}$:

- première coordonnée : $-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}a$, donc $a = 1$;
- deuxième : $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}b$, donc $b = 1$;
- troisième : $-b = -1 \neq -\frac{1}{2}$ ✗.

K **n'appartient pas** au plan (IJF) .

- **Méthode** : on prend les vecteurs **issus d'un même point** du plan (ici F), puis on résout le système.

Réponse. Non : le système est incompatible.

Correction de l'exercice 14 - Droites non coplanaires

a) **Parallèles** ? $\overrightarrow{AB}(1; 0; 0)$ et $\overrightarrow{EH}(0; 1; 0)$ ne sont pas colinéaires : **non**.

Sécantes ? Un point de (AB) s'écrit $(t; 0; 0)$ et un point de (EH) s'écrit $(0; s; 1)$. L'égalité imposerait $0 = 1$ sur la troisième coordonnée : **non**.

b) Si deux droites étaient coplanaires, elles seraient soit parallèles, soit sécantes :
coplanaires $\Rightarrow$ parallèles ou sécantes

Aucun des deux cas n'est réalisé : les droites (AB) et (EH) sont **non coplanaires**.

- **Image** : une droite sur le sol et une droite au plafond, dans deux directions différentes, ne se rencontrent jamais sans être parallèles.

Réponse. Ni parallèles ni sécantes : non coplanaires.

Correction de l'exercice 15 - Une section plane du cube

a) **Théorème des milieux** dans les triangles ABF et BFG :

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AF} \quad \overrightarrow{JK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BG}$$

b) En coordonnées : $I\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right), J\left(1; 0; \frac{1}{2}\right), K\left(1; \frac{1}{2}; 1\right), L\left(\frac{1}{2}; 1; 1\right)$.

— $\overrightarrow{IJ}\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right), \overrightarrow{IK}\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right), \overrightarrow{IL}(0; 1; 1)$.

— $\overrightarrow{IL} = a\overrightarrow{IJ} + b\overrightarrow{IK}$: deuxième coordonnée $b = 2$; première $\frac{1}{2}a + 1 = 0, a = -2$; troisième $-1 + 2 = 1$ ✓

L **appartient** au plan (IJK) : la section du cube par ce plan passe par les milieux de six arêtes (c'est un **hexagone régulier**).

Réponse. a) Théorème des milieux · b) oui, $\overrightarrow{IL} = -2\overrightarrow{IJ} + 2\overrightarrow{IK}$.