

Plaquette 5 - Problèmes de synthèse : produit scalaire, orthogonalité et cube

Géométrie dans l'espace (vecteurs) — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Coordonnées et vecteurs. Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} \quad \text{milieu } I \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right)$$

Produit scalaire (repère **orthonormé**) :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz' = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$$

— **Norme** : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; **distance** $AB = |\overrightarrow{AB}|$.

— **Orthogonalité** : $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

— **Angle** : $\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$.

Colinéarité. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe k avec $\vec{v} = k\vec{u}$ — on le teste en vérifiant que les coordonnées sont **proportionnelles**.

Coplanarité. Trois vecteurs sont coplanaires si l'un est **combinaison linéaire** des deux autres : $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$. On résout le système en a et b ; s'il est **incompatible**, les vecteurs ne sont pas coplanaires.

Bases et repères. $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une **base** de l'espace si les trois vecteurs ne sont **pas coplanaires** ; tout vecteur s'y décompose alors de façon **unique**.

Vecteur normal à un plan. $\vec{n}$ est normal au plan P s'il est orthogonal à **deux vecteurs directeurs non colinéaires** de P .

Distance d'un point à un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$:

$$d(M, P) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Correction de l'exercice 1 - Coordonnées et distances

a) - **Vecteurs** : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

— **Distances** :

$$AB = \sqrt{4 + 4 + 9} = \sqrt{17} \approx 4,123 \quad AC = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6} \approx 2,449$$

b) **Milieu** : $I \left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+0}{2}, \frac{-1+2}{2} \right) = I(2; 1; 0,5)$.

— **Contrôle** : $\overrightarrow{AI} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1,5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \checkmark$

— **Remarque** : $C(2; 1; 1)$ n'est **pas** le milieu de $[AB]$ — il en diffère par la cote (1 au lieu de 0,5).

- **Vérification de non-colinéarité** : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnels ($\frac{2}{1} = 2$ mais $\frac{3}{2} = 1,5$), donc A, B, C forment un **vrai triangle** ✓

Réponse. a) $AB = \sqrt{17}$, $AC = \sqrt{6}$ · b) $I(2; 1; 0,5)$.

Correction de l'exercice 2 - Colinéarité

- On cherche k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$, en comparant coordonnée par coordonnée.
- Première : $-6 = 2k$ donne $k = -3$.
- Deuxième : $9 = -3 \times (-3) = 9$ ✓
- Troisième : $-12 = -3 \times 4 = -12$ ✓
- **Conclusion** : les vecteurs sont **colinéaires**, avec $\vec{v} = -3\vec{u}$.
- **Interprétation** : ils ont la **même direction** mais des **sens opposés** (le coefficient est négatif), et $\|\vec{v}\| = 3\|\vec{u}\|$.
- **Contrôle des normes** : $\|\vec{u}\| = \sqrt{4 + 9 + 16} = \sqrt{29} \approx 5,385$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{36 + 81 + 144} = \sqrt{261} = 3\sqrt{29} \approx 16,16$ ✓
- **Méthode** : il suffit d'une coordonnée discordante pour conclure à la non-colinéarité — mais il faut vérifier **les trois** pour conclure à la colinéarité.

Réponse. Oui : $\vec{v} = -3\vec{u}$.

Correction de l'exercice 3 - Produit scalaire et orthogonalité

- **Produit scalaire** : $1 \times 3 + 2 \times (-1) + (-1) \times 1 = 3 - 2 - 1 = 0$.
- **Conclusion immédiate** : les vecteurs sont **orthogonaux**, donc l'angle vaut $\frac{\pi}{2}$ (soit 90°).
- **Vérification par les normes** : $\|\vec{u}\| = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{9 + 1 + 1} = \sqrt{11}$.
- $\cos \theta = \frac{0}{\sqrt{6}\sqrt{11}} = 0$, donc $\theta = 90^\circ$ ✓
- **Attention** : orthogonaux ne veut **pas** dire « de norme égale » — ici $\sqrt{6} \approx 2,449$ et $\sqrt{11} \approx 3,317$.
- **Usage** : ce test est la base de tout le chapitre — vecteur normal à un plan, projection orthogonale, distance.

Réponse. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$: vecteurs orthogonaux, angle 90° .

Correction de l'exercice 4 - Calcul d'angle

- **Vecteurs** : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- **Produit scalaire** : $1 + 0 + 0 = 1$.

- **Normes** : $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2}$.

- **Cosinus** :

$$\cos \hat{BAC} = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

- **Angle** : $\hat{BAC} = 60^\circ$ (soit $\frac{\pi}{3}$).

- **Contrôle géométrique** : $BC = |\overrightarrow{BC}| = \|(0; -1; 1)\| = \sqrt{2}$ — le triangle a ses **trois côtés égaux** à $\sqrt{2}$, il est donc **équilatéral**, ce qui confirme l'angle de 60° ✓

- **Contexte** : A, B, C sont trois sommets du cube unité ; on retrouve ainsi les faces du **tétraèdre régulier** inscrit dans le cube.

Réponse. $\widehat{BAC} = 60^\circ$ (triangle équilatéral de côté $\sqrt{2}$).

Correction de l'exercice 5 - Coplanarité

- On cherche a, b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$, ce qui donne le système

$$\begin{cases} a = 2 \\ a + b = 3 \\ b = 1 \end{cases}$$

- De la première, $a = 2$; de la troisième, $b = 1$.
- **Vérification de la deuxième** : $2 + 1 = 3$ ✓ — le système est **compatible**.
- **Conclusion** : les vecteurs sont **coplanaires**, avec $\vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v}$.
- **Contrôle** : $2(1; 1; 0) + (0; 1; 1) = (2; 3; 1)$ ✓
- **Conséquence** : $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ n'est **pas une base** de l'espace — ces trois vecteurs n'engendrent qu'un **plan**.
- **Cas contraire** : si la deuxième équation avait été incompatible (par exemple $\vec{w}(2; 4; 1)$), les vecteurs formeraient une base.

Réponse. Oui : $\vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v}$.

Correction de l'exercice 6 - Base de l'espace

Caractère de base. On cherche a, b, c tels que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ b + c = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

- De bas en haut : $c = 0$, puis $b = 0$, puis $a = 0$ — seule la solution **nulle**.
- Les trois vecteurs sont donc **non coplanaires** : c'est une **base** de l'espace ✓

Décomposition de $\vec{t}$. On résout $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{t}$:

$$\begin{cases} a + b + c = 3 \\ b + c = 2 \\ c = 1 \end{cases}$$

- $c = 1$, puis $b = 1$, puis $a = 1$.
- **Résultat** : $\vec{t} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.
- **Contrôle** : $(1; 0; 0) + (1; 1; 0) + (1; 1; 1) = (3; 2; 1)$ ✓
- **Remarque** : le système est **triangulaire**, ce qui rend la résolution immédiate — c'est le signe que la base est « échelonnée ».

Réponse. Base (système homogène de solution nulle) ; $\vec{t} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

Correction de l'exercice 7 - Vecteur normal à un plan

- **Vecteurs directeurs** : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- **Vecteur normal** $\vec{n}(a; b; c)$: il doit être orthogonal aux deux.
- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = -a + b = 0$ donne $b = a$.
- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = -a + c = 0$ donne $c = a$.

- En prenant $a = 1 : \vec{n}(1; 1; 1)$.
- **Équation du plan** : $x + y + z + d = 0$; le passage par $A(1; 0; 0)$ donne $1 + d = 0$, donc $d = -1$.

$$P: x + y + z = 1$$

- **Vérifications** : A, B et C vérifient bien l'équation ($1 = 1$ dans les trois cas) ✓
- **Contrôle du vecteur normal** : $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = -1 + 1 + 0 = 0$ ✓ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = -1 + 0 + 1 = 0$ ✓
- **Lecture** : ce plan coupe les trois axes aux points unités — c'est la face « oblique » du tétraèdre $OABC$.

Réponse. $\vec{n}(1; 1; 1)$ et $P: x + y + z = 1$.

Correction de l'exercice 8 - Distance d'un point à un plan

- **Formule** :

$$d(M, P) = \frac{|2 + 2 \times 1 - 2 \times 3 + 1|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{|2 + 2 - 6 + 1|}{3} = \frac{1}{3} \approx 0,333$$

- **Distance** : $\frac{1}{3}$.
- **Vérification par le projeté** : $\vec{n}(1; 2; -2)$, de norme 3. On cherche t tel que $M + t\vec{n} \in P$:
- $(2 + t) + 2(1 + 2t) - 2(3 - 2t) + 1 = 2 + t + 2 + 4t - 6 + 4t + 1 = -1 + 9t = 0$, donc $t = \frac{1}{9}$.
- Le projeté est $H\left(2 + \frac{1}{9}; 1 + \frac{2}{9}; 3 - \frac{2}{9}\right)$.
- **Contrôle de la distance** : $|\overrightarrow{MH}| = |t| \times \|\vec{n}\| = \frac{1}{9} \times 3 = \frac{1}{3}$ ✓
- **Signe** : $ax_M + by_M + cz_M + d = -1 < 0$ indique de **quel côté** du plan se trouve M — l'information est perdue par la valeur absolue, mais utile pour comparer deux points.

Réponse. $d(M, P) = \frac{1}{3}$.

Correction de l'exercice 9 - Orthogonalité dans un cube

- **Coordonnées** : $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $D(0; 1; 0)$, $E(0; 0; 1)$ et $G(1; 1; 1)$ (sommet opposé à A).
- **Vecteurs** : $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- **Produit scalaire** :

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = -1 + 1 + 0 = 0$$
- **Conclusion** : les deux vecteurs sont **orthogonaux** ✓
- **Interprétation** : la **grande diagonale** du cube est orthogonale à la diagonale $[BD]$ de la face inférieure.
- **Généralisation** : $\overrightarrow{AG}$ est orthogonale à **tout** vecteur du plan BDE — elle est **normale** à ce plan. En effet $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = -1 + 0 + 1 = 0$ ✓
- **Conséquence** : le plan (BDE) a pour équation $x + y + z = 1$, et $\overrightarrow{AG}$ en est un vecteur normal — cohérent avec l'exercice précédent ✓

Réponse. $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$: orthogonaux.

Correction de l'exercice 10 - Angle dans un cube

— **Vecteurs** : $\overrightarrow{AG}(1; 1; 1)$ et $\overrightarrow{AB}(1; 0; 0)$.

— **Produit scalaire** : $1 + 0 + 0 = 1$.

— **Normes** : $|\overrightarrow{AG}| = \sqrt{3}$ et $|\overrightarrow{AB}| = 1$.

— **Cosinus** :

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,5774$$

— **Angle** : $\theta = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 54,74^\circ$.

— **Contrôle** : l'angle est inférieur à 60° , ce qui est cohérent — la diagonale « s'écarte » de l'arête mais reste dans son voisinage angulaire.

— **Propriété remarquable** : cet angle est le **même** avec les trois arêtes $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, par symétrie des coordonnées de $\overrightarrow{AG}$ ✓

— **Longueur de la diagonale** : $\sqrt{3} \approx 1,732$ pour un cube d'arête 1 — à comparer à $\sqrt{2} \approx 1,414$ pour la diagonale d'une **face**.

Réponse. $\theta = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 54,7^\circ$.

Correction de l'exercice 11 - Triangle rectangle dans l'espace

— **Vecteurs** : $\overrightarrow{AB}(2; 1; -2)$, $\overrightarrow{AC}(1; 3; -1)$ et $\overrightarrow{BC}(-1; 2; 1)$.

— **Test en A** : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 + 3 + 2 = 7 \neq 0$ — pas d'angle droit.

— **Test en B** : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (-2)(-1) + (-1)(2) + (2)(1) = 2 - 2 + 2 = 2 \neq 0$.

— **Test en C** : $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (-1)(1) + (-3)(-2) + (1)(-1) = -1 + 6 - 1 = 4 \neq 0$.

— **Conclusion** : le triangle **n'est pas rectangle**.

— **Contrôle par Pythagore** : $AB^2 = 4 + 1 + 4 = 9$, $AC^2 = 1 + 9 + 1 = 11$,
 $BC^2 = 1 + 4 + 1 = 6$.

— Aucune égalité du type $a^2 = b^2 + c^2$: $9 + 6 = 15 \neq 11$, $9 + 11 = 20 \neq 6$, $11 + 6 = 17 \neq 9$
✓ — cohérent.

— **Méthode** : il faut tester les **trois** sommets ; un seul produit scalaire nul suffirait à conclure, mais trois non nuls sont nécessaires pour l'écarter.

Réponse. Non : les trois produits scalaires (7, 2, 4) sont non nuls.

Correction de l'exercice 12 - Projection orthogonale

— **Formule de la projection** sur une droite dirigée par $\vec{u}$:

$$\overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}$$

— **Calculs** : $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 3 + 1 + 2 = 6$ et $\|\vec{u}\|^2 = 3$.

— **Coefficient** : $\frac{6}{3} = 2$, donc $\overrightarrow{AH} = 2\vec{u}$ et $H(2; 2; 2)$.

— **Contrôle d'orthogonalité** : $\overrightarrow{HM}(1; -1; 0)$, et $\overrightarrow{HM} \cdot \vec{u} = 1 - 1 + 0 = 0$ ✓

— **Distance de M à la droite** : $|\overrightarrow{HM}| = \sqrt{2} \approx 1,414$.

— **Contrôle par Pythagore** : $AM^2 = 9 + 1 + 4 = 14$ et $AH^2 + HM^2 = 12 + 2 = 14$ ✓

— **Interprétation** : H est le point de la droite le **plus proche** de M — c'est la définition même du projeté orthogonal.

Réponse. $H(2; 2; 2)$, à distance $\sqrt{2}$ de M .

Correction de l'exercice 13 - Plan médiateur

- **Définition** : le plan médiateur est l'ensemble des points **équidistants** de A et B ; il passe par le **milieu** et est **orthogonal** à $\overline{AB}$.
 - **Milieu** : $I(2; 1; 2)$.
 - **Vecteur normal** : $\overline{AB}(2; -2; 4)$, que l'on simplifie en $\vec{n}(1; -1; 2)$.
 - **Équation** : $x - y + 2z + d = 0$, avec $I : 2 - 1 + 4 + d = 0$, donc $d = -5$.

$$P: x - y + 2z - 5 = 0$$
 - **Vérification par les distances** : pour A , $\frac{|1 - 2 + 0 - 5|}{\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$; pour B ,

$$\frac{|3 - 0 + 8 - 5|}{\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \checkmark$$
 — équidistants.
 - **Contrôle direct** : $AB = \|(2; -2; 4)\| = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$, et chaque point est à $\sqrt{6}$ du plan, soit la **moitié** $\checkmark$
 - **Analogie** : c'est l'équivalent spatial de la **médiatrice** d'un segment dans le plan.
- Réponse.** $x - y + 2z - 5 = 0$.

Correction de l'exercice 14 - Décomposition dans un repère du cube

- **Coordonnées des sommets** : $B(1; 0; 0)$, $C(1; 1; 0)$, $F(1; 0; 1)$, $H(0; 1; 1)$.
- **Vecteurs** :

$$\overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CF} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- **En base** : $\overrightarrow{BH} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.
- **Produit scalaire** (base **orthonormée**) :

$$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CF} = 0 - 1 + 1 = 0$$
- **Conclusion** : les deux diagonales $[BH]$ et $[CF]$ sont **orthogonales** $\checkmark$
- **Normes** : $|\overrightarrow{BH}| = \sqrt{3}$ (grande diagonale) et $|\overrightarrow{CF}| = \sqrt{2}$ (diagonale de face).
- **Remarque** : ces deux droites sont orthogonales **sans être sécantes** — dans l'espace, deux droites peuvent être orthogonales sans se couper (on dit alors « orthogonales non perpendiculaires »).

Réponse. $\overrightarrow{BH}(-1; 1; 1)$, $\overrightarrow{CF}(0; -1; 1)$; produit scalaire nul.

Correction de l'exercice 15 - Ensemble de points

- **Traduction** : $\overline{AM}(x - 1; y - 1; z - 1)$, donc la condition s'écrit

$$2(x - 1) - (y - 1) + 3(z - 1) = 0$$
- **Développement** : $2x - 2 - y + 1 + 3z - 3 = 0$, soit

$$2x - y + 3z - 4 = 0$$
- **Nature de l'ensemble** : c'est le **plan** passant par A et de vecteur **normal** $\vec{n}$.
- **Vérification** : A vérifie $2 - 1 + 3 - 4 = 0 \checkmark$
- **Autre point** : $(2; 0; 0)$ donne $4 - 0 + 0 - 4 = 0 \checkmark$, et $\overline{A(2; 0; 0)} = (1; -1; -1)$ vérifie $2 + 1 - 3 = 0 \checkmark$ — bien orthogonal à $\vec{n}$.

- **À retenir** : l'équation $ax + by + cz + d = 0$ décrit **toujours** un plan de vecteur normal $(a; b; c)$ — c'est la traduction directe d'un produit scalaire nul.

Réponse. Le plan $2x - y + 3z - 4 = 0$, passant par A et normal à $\vec{n}$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : tétraèdre

a) **Trièdre trirectangle** : les trois arêtes issues de O sont portées par les axes.

— $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0, \vec{OA} \cdot \vec{OC} = 0, \vec{OB} \cdot \vec{OC} = 0 \checkmark$

— Les trois angles en O sont donc **droits**.

b) **Volume** : base OAB (triangle rectangle d'aire $\frac{2 \times 3}{2} = 3$), hauteur $OC = 4$.

$$V = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{3} = \frac{3 \times 4}{3} = 4$$

c) **Plan** (ABC) : il coupe les axes en 2, 3 et 4, donc son équation « par les intercepts » est

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1 \iff 6x + 4y + 3z - 12 = 0$$

— **Vérifications** : A donne $12 - 12 = 0 \checkmark$, B donne $12 - 12 = 0 \checkmark$, C donne $12 - 12 = 0 \checkmark$

— **Distance de O** :

$$d = \frac{|-12|}{\sqrt{36 + 16 + 9}} = \frac{12}{\sqrt{61}} \approx 1,5365$$

— **Contrôle par le volume** : l'aire de ABC vaut $\frac{3V}{d} = \frac{12}{12/\sqrt{61}} = \sqrt{61} \approx 7,810$ unités d'aire — et l'on vérifierait ce résultat par le produit vectoriel $\checkmark$

Réponse. b) $V = 4$ · c) $6x + 4y + 3z = 12$ et $d = \frac{12}{\sqrt{61}} \approx 1,54$.