

Plaquette 1 - Vecteurs de l'espace et coordonnées

Géométrie dans l'espace (vecteurs) — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Vecteurs : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).

Relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. **Parallélogramme** : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ si $ABCD$ est un parallélogramme.

Coordonnées dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: $M(x; y; z)$ signifie $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} \quad I \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right)$$

Distance (repère **orthonormé** uniquement) :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Cube $ABCDEFGH$ d'arête 1 dans $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$: $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $C(1; 1; 0)$, $D(0; 1; 0)$, $E(0; 0; 1)$, $F(1; 0; 1)$, $G(1; 1; 1)$, $H(0; 1; 1)$.

Centre de gravité du triangle ABC : $G \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \dots \right)$.

Correction de l'exercice 1 - Vecteurs égaux dans un cube

Deux vecteurs sont égaux s'ils ont **même direction, même sens et même longueur**. Autrement dit :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ABDC \text{ est un parallélogramme}$$

a) Les faces d'un cube sont des carrés : $ABCD$, $ABFE$ et $EFGH$ donnent

$$- \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}.$$

b) Arêtes verticales, orientées vers le haut : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH}$.

c) $\overrightarrow{DA}$ est opposé à $\overrightarrow{AD}$ (même direction, sens contraire), ainsi que $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{GF}$.

— **Piège** : $\overrightarrow{BA}$ n'est pas égal à $\overrightarrow{AB}$; l'ordre des lettres fixe le sens.

Réponse. a) $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{HG}$ · b) $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{CG}$, $\overrightarrow{DH}$ · c) $\overrightarrow{DA}$ par exemple.

Correction de l'exercice 2 - Relation de Chasles dans un cube

On enchaîne les vecteurs avec la **relation de Chasles**, en remplaçant au besoin un vecteur par un vecteur égal :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

a) Les vecteurs s'enchaînent déjà : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AG}$.

b) On remplace $\overrightarrow{AD}$ par $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AE}$ par $\overrightarrow{CG}$:

$$- \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}.$$

c) On remplace chaque vecteur par un vecteur égal bien choisi : $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}$ (face $ADHE$) et

$\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{EA}$ (face $ABFE$). Donc

— $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{ED}$.

— **À retenir (b)** : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG}$, la « règle du parallélépipède ».

Réponse. a) $\overrightarrow{AG}$ · b) $\overrightarrow{AG}$ · c) $\overrightarrow{ED}$.

Correction de l'exercice 3 - Coordonnées dans le repère du cube

a) Chaque sommet s'obtient en partant de A et en avançant d'une unité selon les vecteurs de base concernés :

— $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $D(0; 1; 0)$, $E(0; 0; 1)$;

— $C(1; 1; 0)$ car $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$;

— $F(1; 0; 1)$, $H(0; 1; 1)$, $G(1; 1; 1)$.

b) I est le milieu de la diagonale $[EG]$ de la face du haut :

$$I\left(\frac{0+1}{2}; \frac{0+1}{2}; \frac{1+1}{2}\right) = I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$$

O est le milieu de la grande diagonale $[AG]$: $O\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Réponse. $G(1; 1; 1)$... ; $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$ et $O\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Correction de l'exercice 4 - Coordonnées d'un vecteur et longueur

a) « Extrémité moins origine » pour chaque coordonnée :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4-1 \\ 0-2 \\ 3-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b) Le repère est orthonormé, on peut appliquer la formule de la distance :

— $AB = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 4 + 16} = \sqrt{29} \approx 5,39$.

c) Moyenne des coordonnées : $I\left(\frac{1+4}{2}; \frac{2+0}{2}; \frac{-1+3}{2}\right) = I\left(\frac{5}{2}; 1; 1\right)$.

— **Piège** : la formule de la distance n'est valable qu'en repère **orthonormé**.

Réponse. a) $\overrightarrow{AB}(3; -2; 4)$ · b) $\sqrt{29}$ · c) $I\left(\frac{5}{2}; 1; 1\right)$.

Correction de l'exercice 5 - Compléter un parallélogramme

a) $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} x_D - 1 \\ y_D \\ z_D - 2 \end{pmatrix}$$

— Par identification : $x_D = 2$, $y_D = 2$, $z_D = 3$, soit $D(2; 2; 3)$.

b) **Milieu de** $[AC]$: $\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$; **milieu de** $[BD]$: $\left(\frac{3+2}{2}; \frac{1+2}{2}; \frac{0+3}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$ ✓

— **Piège** : l'ordre des lettres compte ; $ABCD$ parallélogramme donne $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (ou $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$), et non $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Réponse. $D(2; 2; 3)$.

Correction de l'exercice 6 - Un triangle dans le repère

- a) Chaque point est sur un axe, à la distance 2 de l'origine.
 b) Formule de la distance (repère orthonormé) :

$$PQ = \sqrt{(0-2)^2 + (2-0)^2 + 0^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

— De même, $QR = \sqrt{0+4+4} = 2\sqrt{2}$ et $PR = \sqrt{4+0+4} = 2\sqrt{2}$.

Les trois côtés sont égaux : PQR est **équilatéral**.

— **Interprétation** : PQR est la face « oblique » d'un coin de cube de côté 2 ; chacun de ses côtés est une diagonale d'une face carrée.

Réponse. $PQ = QR = PR = 2\sqrt{2}$: triangle équilatéral.

Correction de l'exercice 7 - Combinaisons de vecteurs

On calcule **coordonnée par coordonnée** :

$$\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \begin{pmatrix} \lambda x + \mu x' \\ \lambda y + \mu y' \\ \lambda z + \mu z' \end{pmatrix}$$

a) $2\vec{u} - 3\vec{v}$ a pour coordonnées $(2+6; 4-0; 6-3) = (8; 4; 3)$.

b) $\vec{w} = 2\vec{v} - \vec{u}$, soit $(-4-1; 0-2; 2-3) = (-5; -2; -1)$.

— **Contrôle de b)** : $\vec{u} + \vec{w} = (1-5; 2-2; 3-1) = (-4; 0; 2) = 2\vec{v}$ ✓

— **Méthode** : on résout une équation vectorielle comme une équation numérique, en isolant l'inconnue.

Réponse. a) $(8; 4; 3)$ · b) $\vec{w}(-5; -2; -1)$.

Correction de l'exercice 8 - Un point défini par une relation

On calcule d'abord les vecteurs connus :

— $\overrightarrow{AB}(1; 2; 1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1; 0; 4)$;

— $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(2+1; 4-0; 2-4) = (3; 4; -2)$.

Puis on traduit $\overrightarrow{AM}$:

$$\begin{pmatrix} x_M - 1 \\ y_M - 1 \\ z_M - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

soit $M(4; 5; -2)$.

— **Autre écriture** : $M = A + 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, en ajoutant les coordonnées du vecteur à celles de A.

Réponse. $M(4; 5; -2)$.

Correction de l'exercice 9 - Centre de gravité d'une face oblique

a) Avec $B(1; 0; 0)$, $D(0; 1; 0)$ et $E(0; 0; 1)$:

$$K\left(\frac{1+0+0}{3}; \frac{0+1+0}{3}; \frac{0+0+1}{3}\right) = K\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$$

b) $\overrightarrow{AG}(1; 1; 1)$ et $\overrightarrow{AK}\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$, donc $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$.

- Les vecteurs sont colinéaires : A, K, G sont **alignés**, et K est situé au **tiers** de $[AG]$ en partant de A .
- **Culture** : la grande diagonale (AG) traverse le triangle BDE en son centre de gravité ; on montrera qu'elle lui est même **perpendiculaire**.

Réponse. $K\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$.

Correction de l'exercice 10 - Un point sur une sphère ?

Un point appartient à la sphère si sa distance au centre vaut le rayon :

$$M \in S \Leftrightarrow OM = 3 \Leftrightarrow OM^2 = 9$$

- a) $\overrightarrow{OM}(2; 2; 1)$, donc $OM^2 = 4 + 4 + 1 = 9 : M \in S \checkmark$
 b) $\overrightarrow{ON}(0; 3; 2)$, donc $ON^2 = 0 + 9 + 4 = 13 > 9 : ON = \sqrt{13} \approx 3,6 > 3$, le point N est à **l'extérieur**.

- **Astuce** : comparer les **carrés** des distances évite de calculer des racines.

Réponse. a) Oui ($OM = 3$) · b) Non, à l'extérieur ($ON = \sqrt{13}$).

Correction de l'exercice 11 - Image par une translation

La translation de vecteur $\vec{u}$ envoie M sur M' tel que

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$

- a) $A' = A + \vec{u} : A'(0 + 2; 4 - 1; -1 + 3) = A'(2; 3; 2)$.
 b) $\overrightarrow{BB'} = \vec{u}$ donne $B = B' - \vec{u} : B(5 - 2; 5 + 1; 5 - 3) = B(3; 6; 2)$.

- **Contrôle de b)** : $\overrightarrow{BB'}(2; -1; 3) = \vec{u} \checkmark$

- **Remarque** : une translation conserve les longueurs : $AB = A'B'$.

Réponse. a) $A'(2; 3; 2)$ · b) $B(3; 6; 2)$.

Correction de l'exercice 12 - Diagonale d'un pavé droit

- a) On avance de 4 selon (AB) , de 2 selon (AD) et de 3 selon (AE) : $G(4; 2; 3)$.
 b) Repère orthonormé : formule de la distance,

$$AG = \sqrt{4^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 4 + 9} = \sqrt{29} \approx 5,39$$

- **Lien avec Pythagore** : la diagonale de la base vaut $AC = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$, puis le triangle ACG rectangle en C donne $AG^2 = AC^2 + CG^2 = 20 + 9 \checkmark$
- **Formule générale** : la diagonale d'un pavé de dimensions a, b, c vaut $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Réponse. a) $G(4; 2; 3)$ · b) $AG = \sqrt{29}$.

Correction de l'exercice 13 - La grande diagonale d'un cube

- a) Les vecteurs de base ont pour longueur 1 et sont orthogonaux : le repère est **orthonormé**. On avance de a dans chaque direction : $G(a; a; a)$.
 b) Formule de la distance :

$$AG = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$$

- Pour $a = 10$ cm : $AG = 10\sqrt{3} \approx 17,3$ cm.

- **Comparaison** : la diagonale d'une face vaut $a\sqrt{2} \approx 14,1$ cm ; celle du cube est plus longue, $a\sqrt{3}$.
- **Application** : c'est la longueur de la plus grande baguette qui tienne dans une boîte cubique de 10 cm de côté.

Réponse. a) $G(a; a; a) \cdot b) AG = a\sqrt{3}$, soit $\approx 17,3$ cm.

Correction de l'exercice 14 - Symétrique d'un point

A' est le symétrique de A par rapport à I si I est le **milieu** de $[AA']$:

$$x_I = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \Leftrightarrow x_{A'} = 2x_I - x_A$$

et de même pour y et z .

a) $A'(2 \times 0 - 2; 2 \times 3 + 1; 2 \times 1 - 5) = A'(-2; 7; -3)$.

b) Par rapport à $O(0; 0; 0)$: on change le signe de chaque coordonnée, $(-2; 1; -5)$.

— **Contrôle de a)** : milieu de $[AA']$: $\left(\frac{2-2}{2}; \frac{-1+7}{2}; \frac{5-3}{2}\right) = (0; 3; 1) = I \checkmark$

Réponse. a) $A'(-2; 7; -3) \cdot b) (-2; 1; -5)$.

Correction de l'exercice 15 - Une pyramide dans un repère

a) Dans ce repère : $A(0; 0; 0)$, $B(2; 0; 0)$, $C(2; 2; 0)$, $D(0; 2; 0)$.

— O est le milieu de la diagonale $[AC]$: $O(1; 1; 0)$.

— S est à la verticale de O , à la hauteur 3 : $S(1; 1; 3)$.

b) Formule de la distance :

$$SA = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{11} \approx 3,32$$

— **Symétrie** : les quatre arêtes latérales ont la même longueur, car S est à égale distance des quatre sommets du carré.

Réponse. $S(1; 1; 3)$, $O(1; 1; 0)$; $SA = \sqrt{11}$.