

Plaquette 4 – Bases, repères et décompositions

Géométrie dans l'espace (vecteurs) – Terminale spé maths

Exercices

Méthode

Trois vecteurs **non coplanaires** forment une **base** : tout vecteur s'écrit alors de façon **unique** $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$, et $(x; y; z)$ sont ses coordonnées. Pour décomposer, on résout un **système de trois équations**. Un repère est une origine et une base ; dans un solide, choisir un repère adapté (un sommet et trois arêtes) transforme la géométrie en calculs.

Exercice 1 – Reconnaître une base

Montrer que $\vec{u}(1; 1; 0)$, $\vec{v}(0; 1; 1)$ et $\vec{w}(1; 0; 1)$ forment une base de l'espace.

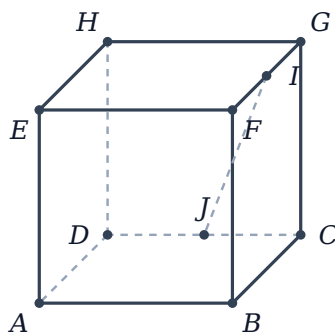
Exercice 2 – Décomposer dans une base

Avec $\vec{u}(1; 1; 0)$, $\vec{v}(0; 1; 1)$, $\vec{w}(1; 0; 1)$ (base de l'espace), décomposer $\vec{t}(2; 3; 1)$ sous la forme $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$.

Exercice 3 – Coordonnées de milieux dans le cube

Dans le cube $ABCDEFGH$ repéré par $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on note I le milieu de $[FG]$ et J celui de $[CD]$.

- Donner les coordonnées de I et J .
- Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{IJ}$ et exprimer ce vecteur à l'aide de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$.

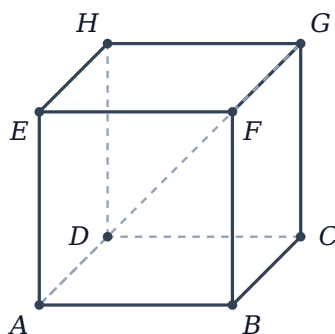


I milieu de $[FG]$, J milieu de $[CD]$

Exercice 4 – Changer de repère

$ABCDEFGH$ est un cube. Donner les coordonnées du point G :

- dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$;
- dans le repère $(B; \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BF})$;
- dans le repère $(H; \overrightarrow{HE}, \overrightarrow{HG}, \overrightarrow{HD})$.

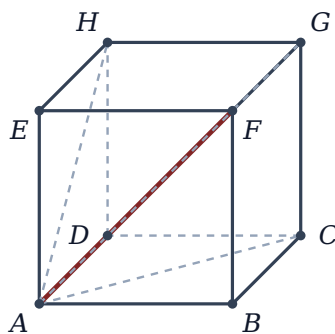


Le cube et le sommet G

Exercice 5 – Une famille qui n'est pas une base

$ABCDEFGH$ est un cube.

- La famille $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est-elle une base ?
- Et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AH})$? Exprimer alors $\overrightarrow{AG}$ dans cette base.

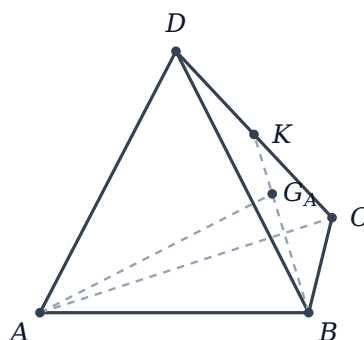


Les diagonales de faces issues de A et la grande diagonale

Exercice 6 – Repère d'un tétraèdre

$ABCD$ est un tétraèdre, repéré par $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

- Donner les coordonnées de A, B, C, D , puis du milieu K de $[CD]$.
- Donner les coordonnées du centre de gravité G_A du triangle BCD .

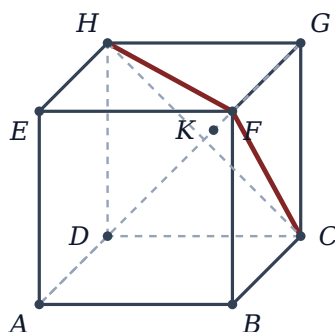


Milieu K de $[CD]$ et centre de gravité du triangle BCD

Exercice 7 – Alignement grâce à un repère

$ABCDEFGH$ est un cube ; K est le centre de gravité du triangle CFH .

Montrer que les points A, K et G sont alignés, et préciser la position de K sur $[AG]$.

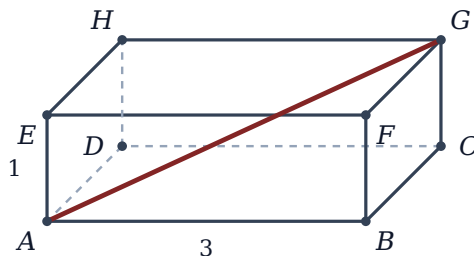


Le triangle CFH et la diagonale $[AG]$

Exercice 8 - Pourquoi exiger un repère orthonormé ?

Un pavé droit $ABCDEFGH$ a pour dimensions $AB = 3$, $AD = 2$, $AE = 1$. On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

- Quelles sont les coordonnées de G ?
- Un élève calcule $AG = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$. Quelle est son erreur ? Quelle est la vraie longueur ?

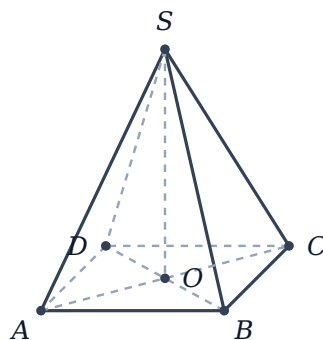


Pavé $3 \times 2 \times 1$ et sa diagonale

Exercice 9 - Décomposition dans une pyramide

$SABCD$ est une pyramide dont la base $ABCD$ est un parallélogramme.

- Montrer que $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$.
- En déduire l'expression de $\overrightarrow{SC}$ dans la base $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SD})$.



Pyramide $SABCD$, O centre de la base

Exercice 10 - Le centre de gravité du tétraèdre

$ABCD$ est un tétraèdre repéré par $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$. On cherche le point G tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

- Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.
- En déduire les coordonnées de G .

Exercice 11 - Colinéarité dans un repère quelconque

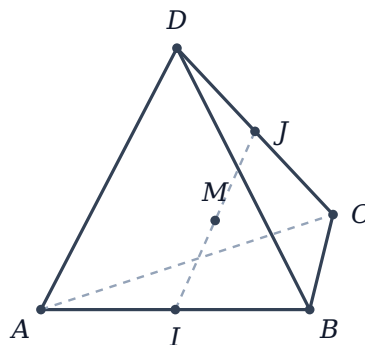
$ABCD$ est un tétraèdre, repéré par $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$. On définit M et N par $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$.

Montrer que (MN) est parallèle au plan (BCD) ... ou pas, en calculant les coordonnées de $\overrightarrow{MN}$.

Exercice 12 – Milieux d'arêtes opposées

$ABCD$ est un tétraèdre, repéré par $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$. I est le milieu de $[AB]$ et J celui de $[CD]$.

- Calculer les coordonnées de I , J et du milieu M de $[IJ]$.
- Comparer M au centre de gravité G du tétraèdre.



Le segment $[IJ]$ et son milieu M

Exercice 13 – Une base selon un paramètre

Pour quelles valeurs du réel m les vecteurs $\vec{u}(1; 0; m)$, $\vec{v}(0; 1; 1)$ et $\vec{w}(1; 1; 2)$ forment-ils une base de l'espace ?

Exercice 14 – Un système trois fois trois

Soit $\vec{u}(1; 1; 1)$, $\vec{v}(0; 1; 1)$ et $\vec{w}(0; 0; 1)$.

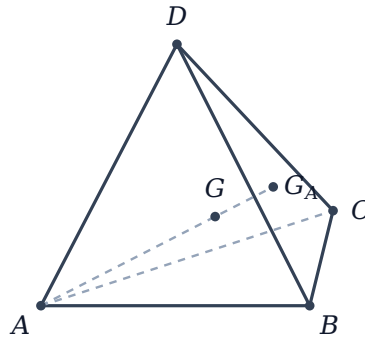
- Justifier que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base.
- Décomposer $\vec{t}(2; 5; 4)$ dans cette base.

Exercice 15 – Les médianes du tétraèdre

$ABCD$ est un tétraèdre repéré par $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$, de centre de gravité $G\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$.

On note G_A le centre de gravité du triangle BCD .

Montrer que G appartient à la droite (AG_A) et que $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG_A}$.



La médiane $[AG_A]$ passe par le centre de gravité G