

Plaquette 5 - Problèmes de synthèse : produit scalaire, orthogonalité et cube

Géométrie dans l'espace (vecteurs) — Terminale spé maths

Exercices

Méthode

On calcule avec les **coordonnées** dans un repère orthonormé, on teste **colinéarité** et **coplanarité**, on utilise le **produit scalaire** pour les angles et l'orthogonalité, et on travaille dans un **cube** repéré.

Exercice 1 - Coordonnées et distances

Soient $A(1; 2; -1)$, $B(3; 0; 2)$ et $C(2; 1; 1)$.

- a) Calculer $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et les distances AB , AC .
- b) Déterminer le milieu de $[AB]$.

Exercice 2 - Colinéarité

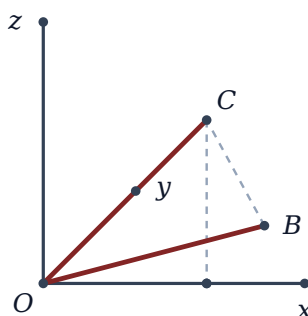
Les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

Exercice 3 - Produit scalaire et orthogonalité

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et l'angle entre les deux vecteurs.

Exercice 4 - Calcul d'angle

Soient $A(0; 0; 0)$, $B(1; 1; 0)$ et $C(1; 0; 1)$. Calculer l'angle $\widehat{BAC}$.



Les points B et C ; ici A est l'origine O

Exercice 5 – Coplanarité

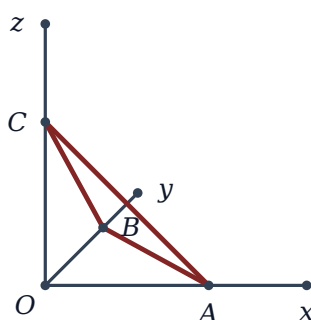
Les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ?

Exercice 6 – Base de l'espace

Montrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ avec $\vec{u}(1; 0; 0)$, $\vec{v}(1; 1; 0)$, $\vec{w}(1; 1; 1)$ est une base, puis décomposer $\vec{t}(3; 2; 1)$.

Exercice 7 – Vecteur normal à un plan

Déterminer un vecteur normal au plan passant par $A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$ et $C(0; 0; 1)$, puis l'équation du plan.



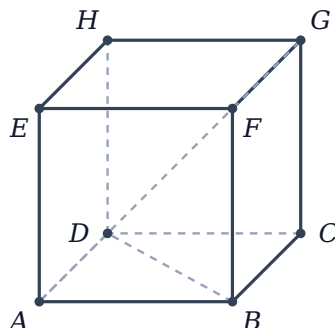
Le plan (ABC) coupe les trois axes

Exercice 8 – Distance d'un point à un plan

Calculer la distance du point $M(2; 1; 3)$ au plan $P: x + 2y - 2z + 1 = 0$.

Exercice 9 – Orthogonalité dans un cube

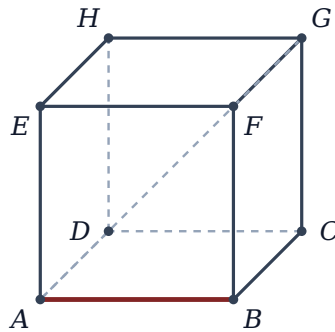
Dans le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1, repéré par $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, montrer que $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux.



La diagonale [AG] et la diagonale de face [BD]

Exercice 10 - Angle dans un cube

Dans le même cube d'arête 1, calculer l'angle entre la grande diagonale $\overline{AG}$ et l'arête $\overline{AB}$.



La grande diagonale $[AG]$ et l'arête $[AB]$

Exercice 11 - Triangle rectangle dans l'espace

Soient $A(1; 0; 2)$, $B(3; 1; 0)$ et $C(2; 3; 1)$. Le triangle ABC est-il rectangle ?

Exercice 12 - Projection orthogonale

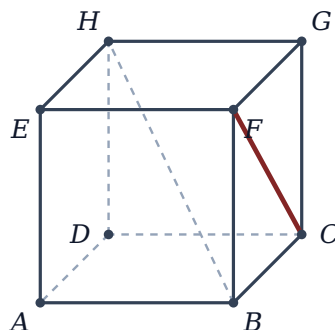
Déterminer le projeté orthogonal de $M(3; 1; 2)$ sur la droite passant par $A(0; 0; 0)$ de vecteur directeur $\vec{u}(1; 1; 1)$.

Exercice 13 - Plan médiateur

Déterminer l'équation du plan médiateur du segment $[AB]$ avec $A(1; 2; 0)$ et $B(3; 0; 4)$.

Exercice 14 - Décomposition dans un repère du cube

Dans le cube $ABCDEFGH$ repéré par $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, exprimer $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{CF}$ dans la base, puis calculer leur produit scalaire.



Les segments $[BH]$ et $[CF]$

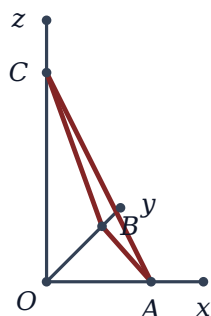
Exercice 15 – Ensemble de points

Déterminer l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, avec $A(1; 1; 1)$ et $\vec{n}(2; -1; 3)$.

Exercice 16 – Synthèse : tétraèdre

Soient $O(0; 0; 0)$, $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$ et $C(0; 0; 4)$.

- Montrer que le trièdre en O est **trirectangle**.
- Calculer le volume du tétraèdre $OABC$.
- Déterminer l'équation du plan (ABC) et la distance de O à ce plan.



Le tétraèdre OABC