

Plaquette 1 - Limites en l'infini

Limites de fonctions — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Limites de référence en $+\infty$.

$$x^n \rightarrow +\infty \quad \sqrt{x} \rightarrow +\infty \quad \frac{1}{x^n} \rightarrow 0 \quad \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 0 \quad e^x \rightarrow +\infty \quad e^{-x} \rightarrow 0$$

En $-\infty$: $x^n \rightarrow +\infty$ si n est pair, $-\infty$ si n est impair ; $\frac{1}{x^n} \rightarrow 0$; $e^x \rightarrow 0$.

Polynômes et quotients : en $\pm\infty$, un polynôme a la limite de son **terme de plus haut degré** ; un quotient de polynômes a la limite du **quotient des termes de plus haut degré**.

Croissances comparées : pour tout entier $n \geq 1$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$$

Comparaison. Si $f(x) \geq g(x)$ pour x assez grand et $g(x) \rightarrow +\infty$, alors $f(x) \rightarrow +\infty$.

Gendarmes. Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ pour x assez grand et g, h tendent vers ℓ , alors $f(x) \rightarrow \ell$.

Asymptote horizontale. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$, la droite $y = \ell$ est asymptote à la courbe en $+\infty$; le **signe** de $f(x) - \ell$ donne la position de la courbe.

Correction de l'exercice 1 - Les limites de référence

On s'appuie sur les courbes des fonctions de référence.

Fonction	x^2	x^3	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	e^x	e^{-x}
en $+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	0	$+\infty$	0
en $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0	0	$+\infty$

— $\sqrt{x} \rightarrow +\infty$ en $+\infty$ ($\sqrt{x}$ n'est pas définie en $-\infty$).

— **Puissance paire :** x^2 est positif, d'où $+\infty$ des deux côtés ; **puissance impaire :** x^3 a le signe de x .

— **Exponentielle :** $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$; en $+\infty$, le dénominateur explose, donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

— **À retenir :** $\frac{1}{\text{grand}} \rightarrow 0$ et $\frac{1}{\text{petit positif}} \rightarrow +\infty$.

Réponse. Tableau ci-dessus ; $\sqrt{x} \rightarrow +\infty$.

Correction de l'exercice 2 - Un polynôme des deux côtés

En $+\infty$, $-2x^3 \rightarrow -\infty$ et $5x^2 \rightarrow +\infty$: forme indéterminée $-\infty + \infty$. On **factorise par le terme de plus haut degré** (pour $x \neq 0$) :

$$f(x) = x^3 \left(-2 + \frac{5}{x} - \frac{1}{x^3} \right)$$

- La parenthèse tend vers -2 en $\pm\infty$.
- En $+\infty$: $x^3 \rightarrow +\infty$, produit par un nombre qui tend vers -2 : $f(x) \rightarrow -\infty$.
- En $-\infty$: $x^3 \rightarrow -\infty$, et $(-\infty) \times (-2) = +\infty$: $f(x) \rightarrow +\infty$.
- **Règle rapide** : un polynôme se comporte en $\pm\infty$ comme son terme dominant, ici $-2x^3$.
- **Contrôle** : $f(10) = -2\,000 + 500 - 1 = -1\,501$, déjà très négatif ✓

Réponse. $-\infty$ en $+\infty$, $+\infty$ en $-\infty$.

Correction de l'exercice 3 - Quotient de même degré

Numérateur et dénominateur tendent vers $+\infty$: forme $\frac{\infty}{\infty}$. On factorise en haut et en bas par x^2 ($x \neq 0$) :

$$f(x) = \frac{x^2 \left(4 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left(2 + \frac{5}{x^2} \right)} = \frac{4 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{5}{x^2}}$$

- En $\pm\infty$, les termes en $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x^2}$ tendent vers 0 : $f(x) \rightarrow \frac{4}{2} = 2$.
- La droite d'équation $y = 2$ est **asymptote horizontale** à la courbe en $+\infty$ et en $-\infty$.
- **Règle rapide** : même degré en haut et en bas $\rightarrow$ limite égale au quotient des coefficients dominants, ici $\frac{4}{2}$.

Réponse. $\lim f = 2$ en $\pm\infty$: asymptote $y = 2$.

Correction de l'exercice 4 - Quotients de degrés différents

On garde les termes dominants après factorisation.

a) On factorise par x en haut et par x^2 en bas :

$$g(x) = \frac{x \left(3 + \frac{1}{x} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} = \frac{1}{x} \times \frac{3 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

Le premier facteur tend vers 0, le second vers 3 : $g(x) \rightarrow 0$ en $+\infty$ comme en $-\infty$.

$$\text{b) } h(x) = \frac{x^3 \left(1 - \frac{2}{x^3} \right)}{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = x^2 \times \frac{1 - \frac{2}{x^3}}{1 + \frac{1}{x}}$$

- La fraction tend vers 1 et $x^2 \rightarrow +\infty$ en $+\infty$ **et** en $-\infty$.
- Donc $h(x) \rightarrow +\infty$ des deux côtés.
- **Piège en b)** : en $-\infty$, x^3 et x sont tous deux négatifs ; leur quotient x^2 est positif.

Réponse. a) 0 en $\pm\infty$ · b) $+\infty$ en $\pm\infty$.

Correction de l'exercice 5 - Lire puis démontrer une asymptote

a) La courbe semble se rapprocher de la droite horizontale d'ordonnée 2 à gauche comme à droite : on conjecture $\lim f = 2$ en $\pm\infty$.

b) **Réduction au même dénominateur** :

$$2 - \frac{3}{x^2 + 1} = \frac{2(x^2 + 1) - 3}{x^2 + 1} = \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1} = f(x)$$

— En $\pm\infty$, $x^2 + 1 \rightarrow +\infty$, donc $\frac{3}{x^2 + 1} \rightarrow 0$ et $f(x) \rightarrow 2$.

— La droite $y = 2$ est asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$.

c) $f(x) - 2 = -\frac{3}{x^2 + 1} < 0$ pour tout x : la courbe est **toujours en dessous** de son asymptote.

— **Contrôle** : $f(0) = -1$, minimum de la fonction, visible sur la figure ✓

Réponse. $\lim f = 2$ en $\pm\infty$; la courbe est sous l'asymptote $y = 2$.

Correction de l'exercice 6 - Une racine en l'infini

a) En $-\infty$: $\sqrt{x^2 + 3} \rightarrow +\infty$ et $-x \rightarrow +\infty$. La **somme** tend vers $+\infty$: pas d'indétermination.

b) En $+\infty$: $\sqrt{x^2 + 3} \rightarrow +\infty$ et $-x \rightarrow -\infty$, forme $\infty - \infty$. On multiplie par la **quantité conjuguée** :

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2 + 3} - x)(\sqrt{x^2 + 3} + x)}{\sqrt{x^2 + 3} + x} = \frac{(x^2 + 3) - x^2}{\sqrt{x^2 + 3} + x} = \frac{3}{\sqrt{x^2 + 3} + x}$$

— Le dénominateur tend vers $+\infty$: $f(x) \rightarrow 0$.

— L'axe des abscisses ($y = 0$) est asymptote horizontale en $+\infty$.

— **À retenir** : l'indétermination dépend du côté ! En $-\infty$, les deux termes « tirent » dans le même sens.

Réponse. a) $+\infty$ · b) 0.

Correction de l'exercice 7 - Avec l'exponentielle

On utilise les limites de référence de l'exponentielle :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$$

a) En $+\infty$: $2e^{-x} \rightarrow 0$, donc $f(x) \rightarrow 3$.

En $-\infty$: quand $x \rightarrow -\infty$, $-x \rightarrow +\infty$, donc $e^{-x} \rightarrow +\infty$; ainsi $-2e^{-x} \rightarrow -\infty$ et $f(x) \rightarrow -\infty$.

b) La droite $y = 3$ est **asymptote horizontale** en $+\infty$.

— **Position** : $f(x) - 3 = -2e^{-x} < 0$ car une exponentielle est toujours strictement positive : la courbe est **sous** l'asymptote.

— **Contrôle** : $f(0) = 3 - 2 = 1$; $f(5) \approx 3 - 0,013 = 2,987$ ✓

Réponse. 3 en $+\infty$ (asymptote $y = 3$), $-\infty$ en $-\infty$.

Correction de l'exercice 8 - Limites de fonctions composées

On procède **de l'intérieur vers l'extérieur** : limite de la fonction intérieure, puis limite de la fonction extérieure en cette valeur.

$$\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b \text{ et } \lim_{X \rightarrow b} v(X) = c \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} v(u(x)) = c$$

a) $X = \frac{1}{x} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$, et $e^X \rightarrow e^0 = 1$ quand $X \rightarrow 0$. Donc $f(x) \rightarrow 1$.

b) $X = 4 + \frac{1}{x} \rightarrow 4$, et $\sqrt{X} \rightarrow \sqrt{4} = 2$. Donc $g(x) \rightarrow 2$.

c) $X = -x^2 \rightarrow -\infty$, et $e^X \rightarrow 0$ quand $X \rightarrow -\infty$. Donc $h(x) \rightarrow 0$.

— **Rédaction** : poser la variable intermédiaire X rend le raisonnement clair et évite les confusions.

Réponse. a) 1 · b) 2 · c) 0.

Correction de l'exercice 9 - Croissances comparées

Les formes a) et b) sont indéterminées ($\infty \times 0$ et $\frac{\infty}{\infty}$) ; on applique les **croissances comparées** : en $+\infty$, l'exponentielle l'emporte sur toute puissance de x .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

a) Avec $n = 1$: $x e^{-x} \rightarrow 0$.

b) Avec $n = 2$: $\frac{e^x}{x^2} \rightarrow +\infty$.

c) On développe : $(x^2 + 1)e^{-x} = x^2 e^{-x} + e^{-x}$. Le premier terme tend vers 0 (croissances comparées, $n = 2$), le second aussi : la somme tend vers 0.

— **Contrôle numérique** : $20^2 e^{-20} \approx 8 \times 10^{-7}$ — l'exponentielle écrase le carré ✓

Réponse. a) 0 · b) $+\infty$ · c) 0.

Correction de l'exercice 10 - Conclure par comparaison

$\sin x$ et $\cos x$ n'ont pas de limite en $+\infty$, mais ils sont **bornés** : $-1 \leq \sin x \leq 1$. On utilise les théorèmes de **comparaison**.

a) $x + \sin x \geq x - 1$ pour tout x , et $x - 1 \rightarrow +\infty$:

$$f(x) \geq g(x) \text{ et } g(x) \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$$

Donc $x + \sin x \rightarrow +\infty$.

b) $\cos x \leq 1$, donc $-x^2 + \cos x \leq -x^2 + 1$, et $-x^2 + 1 \rightarrow -\infty$. Par comparaison (version $-\infty$, avec une **majoration**), $-x^2 + \cos x \rightarrow -\infty$.

— **Sens de l'inégalité** : pour $+\infty$ il faut **minorer**, pour $-\infty$ il faut **majorer**.

Réponse. a) $+\infty$ · b) $-\infty$.

Correction de l'exercice 11 - Les gendarmes en l'infini

On encadre le terme borné, puis on applique le **théorème des gendarmes** :

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \text{ et } g, h \rightarrow \ell \Rightarrow f(x) \rightarrow \ell$$

a) Pour $x > 0$: $-1 \leq \sin x \leq 1$, et en divisant par $x > 0$,

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

Les deux bornes tendent vers 0 : la limite vaut 0.

b) On sépare : $\frac{2x + \cos x}{x} = 2 + \frac{\cos x}{x}$. Comme au a), $-\frac{1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x}$, donc $\frac{\cos x}{x} \rightarrow 0$ et la limite vaut 2.

— **Interprétation** : la courbe de $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ oscille, mais entre les hyperboles $y = \pm \frac{1}{x}$, qui l'écrasent vers l'axe des abscisses.

Réponse. a) 0 · b) 2.

Correction de l'exercice 12 - Position par rapport à l'asymptote

a) Quotient de polynômes de même degré : $f(x) = \frac{3 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}} \rightarrow 3$ en $\pm\infty$. Asymptote horizontale : $y = 3$.

b) **Différence** avec l'asymptote :

$$f(x) - 3 = \frac{3x - 1 - 3(x + 2)}{x + 2} = \frac{-7}{x + 2}$$

- Pour $x > -2$: $x + 2 > 0$, donc $f(x) - 3 < 0$: la courbe est **sous** l'asymptote (côté $+\infty$).
- Pour $x < -2$: $x + 2 < 0$, donc $f(x) - 3 > 0$: la courbe est **au-dessus** (côté $-\infty$).
- **Méthode** : la position se lit sur le **signe** de $f(x) - \ell$, pas sur la limite.
- **Contrôle** : $f(0) = -\frac{1}{2} < 3$ et $f(-3) = \frac{-10}{-1} = 10 > 3$ ✓

Réponse. $y = 3$; courbe au-dessus pour $x < -2$, en dessous pour $x > -2$.

Correction de l'exercice 13 - Refroidissement d'une tasse

a) $T(0) = 20 + 70e^0 = 20 + 70 = 90$ °C.

b) Quand $t \rightarrow +\infty$, $-0,1t \rightarrow -\infty$, donc par composition

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,1t} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} T(t) = 20$$

Interprétation : le café refroidit jusqu'à la température de la pièce, 20 °C ; la droite $T = 20$ est asymptote horizontale.

c) $T(t) - 20 = 70e^{-0,1t} > 0$ pour tout t : la température reste **toujours au-dessus** de 20 °C, sans jamais l'atteindre (dans ce modèle).

— **Ordre de grandeur** : $T(30) = 20 + 70e^{-3} \approx 23,5$ °C — au bout d'une demi-heure, le café est presque froid.

Réponse. a) 90 °C · b) 20 °C, température de la pièce · c) non.

Correction de l'exercice 14 - Choisir un paramètre

a) Pour $a \neq 0$, numérateur et dénominateur sont de degré 2 ; on factorise par x^2 :

$$f(x) = \frac{a + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{1}{x}} \rightarrow \frac{a}{2}$$

(cette écriture reste valable pour $a = 0$).

b) La droite $y = 3$ est asymptote en $+\infty$ si et seulement si $\frac{a}{2} = 3$, soit $a = 6$.

c) Si $a = 0$, $f(x) = \frac{1}{2x^2 + x} \rightarrow 0$: l'asymptote est l'axe des abscisses. La formule $\frac{a}{2}$ donne bien 0.

— **Contrôle** pour $a = 6$: $f(100) = \frac{60\,001}{20\,100} \approx 2,985$ ✓

Réponse. a) $\frac{a}{2}$ · b) $a = 6$ · c) limite 0.

Correction de l'exercice 15 - Aussi proche qu'on veut

a) $\frac{3}{x} \rightarrow 0$, donc $\ell = 2$.

b) Pour $x > 0$, $f(x) - 2 = \frac{3}{x}$. On résout :

$$\frac{3}{x} < 0,01 \Leftrightarrow x > \frac{3}{0,01} = 300$$

(on multiplie par $x > 0$ puis on divise par $0,01 > 0$).

— Pour 10^{-6} : $\frac{3}{x} < 10^{-6} \Leftrightarrow x > 3 \times 10^6$.

Sens de la limite : quelle que soit la précision $\varepsilon > 0$ exigée, il existe un seuil ($x > \frac{3}{\varepsilon}$) au-delà duquel **toutes** les valeurs de $f(x)$ sont à moins de ε de 2. C'est exactement la définition de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

Réponse. a) $\ell = 2$ · b) $x > 300$, puis $x > 3 \times 10^6$.