

Plaquette 2 - Limites en un point et latérales

Limites de fonctions — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Limites de référence en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Quotient dont le dénominateur tend vers 0 (numérateur de limite $L \neq 0$) : la limite est infinie, de signe donné par la **règle des signes**.

- $\frac{L}{0^+}$: $+\infty$ si $L > 0$, $-\infty$ si $L < 0$;
- $\frac{L}{0^-}$: $-\infty$ si $L > 0$, $+\infty$ si $L < 0$.

On étudie donc le **signe du dénominateur** à gauche et à droite de a (tableau de signes).

Asymptote verticale. Si $f(x) \rightarrow \pm\infty$ quand $x \rightarrow a$ (d'un côté au moins), la droite $x = a$ est asymptote verticale.

Forme $\frac{0}{0}$: a est racine du numérateur et du dénominateur, on **factorise par** $(x - a)$ et on simplifie ; avec une racine, on multiplie par la **quantité conjuguée**.

Nombre dérivé : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$. Par exemple :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Limite en un point : elle existe lorsque les limites à gauche et à droite existent et sont **égales**.

Correction de l'exercice 1 - Il suffit de remplacer

Les fonctions polynômes, rationnelles, racine carrée et exponentielle sont **continues** là où elles sont définies. Si l'expression est définie en a , on remplace simplement :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

a) $2^2 + 3 \times 2 - 1 = 4 + 6 - 1 = 9$.

b) Le dénominateur vaut $1 \neq 0$ en 0 : $\frac{e^0}{0+1} = \frac{1}{1} = 1$.

c) Le dénominateur vaut $3 \neq 0$ en 4 : $\frac{\sqrt{4}+1}{4-1} = \frac{3}{3} = 1$.

— **Réflexe** : on vérifie d'abord que le **dénominateur ne s'annule pas** en a ; c'est seulement dans ce cas que l'on peut remplacer.

Réponse. a) 9 · b) 1 · c) 1.

Correction de l'exercice 2 - À gauche et à droite de zéro

a) Quand x tend vers 0 **par valeurs positives**, $\frac{1}{x}$ est positif et devient aussi grand qu'on veut ($\frac{1}{0,001} = 1\,000$) :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Les deux limites latérales sont **différentes** : la fonction inverse n'a **pas de limite** en 0.

b) $x^2 > 0$ des deux côtés de 0, donc $\frac{1}{x^2} > 0$ et $\frac{1}{x^2} \rightarrow +\infty$ à gauche comme à droite :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

— Dans les deux cas, l'axe des ordonnées ($x = 0$) est **asymptote verticale**.

— **Idée clé** : c'est le **signe** du dénominateur au voisinage de 0 qui décide.

Réponse. a) $+\infty$ et $-\infty$: pas de limite · b) $+\infty$ des deux côtés.

Correction de l'exercice 3 - Une asymptote verticale

Numérateur : $2x + 1 \rightarrow 3$ quand $x \rightarrow 1$.

Dénominateur : $x - 1 \rightarrow 0$; son signe :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x - 1$		-	0	+	

— À droite ($x > 1$) : $x - 1 \rightarrow 0^+$, donc

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

— À gauche ($x < 1$) : $x - 1 \rightarrow 0^-$, donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty$.

Interprétation : la droite $x = 1$ est **asymptote verticale** ; la courbe « monte » à droite de 1 et « plonge » à gauche.

— **Contrôle** : $f(1,01) = \frac{3,02}{0,01} = 302$ et $f(0,99) = \frac{2,98}{-0,01} = -298$ ✓

Réponse. $-\infty$ à gauche de 1, $+\infty$ à droite : asymptote $x = 1$.

Correction de l'exercice 4 - Un trou ou une asymptote ?

a) **Différence de carrés** : $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$. Pour $x \neq -2$ et $x \neq 2$:

$$f(x) = \frac{x + 2}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{1}{x - 2}$$

b) **En** -2 (forme $\frac{0}{0}$ au départ) : avec la forme simplifiée, $f(x) \rightarrow \frac{1}{-2 - 2} = -\frac{1}{4}$. La limite est **finie** : la courbe a un simple « trou » au point $\left(-2; -\frac{1}{4}\right)$, pas d'asymptote.

En 2 : le numérateur vaut 1 et $x - 2 \rightarrow 0$.

— À droite, $x - 2 \rightarrow 0^+$: $f(x) \rightarrow +\infty$;

— à gauche, $x - 2 \rightarrow 0^-$: $f(x) \rightarrow -\infty$.

La droite $x = 2$ est asymptote verticale.

— **Leçon** : une valeur interdite ne donne pas toujours une asymptote ; il faut regarder si le **numérateur** s'annule aussi.

Réponse. En -2 : limite $-\frac{1}{4}$; en 2 : $-\infty$ à gauche, $+\infty$ à droite.

Correction de l'exercice 5 - Lever une forme 0/0 en factorisant

En remplaçant, on obtient $\frac{0}{0}$: le numérateur **s'annule** en a , donc il se **factorise** par $(x - a)$.

a) $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$. Pour $x \neq 3$:

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = x + 3 \rightarrow 6$$

b) 2 est racine de $x^2 - 5x + 6$ ($4 - 10 + 6 = 0$) ; l'autre racine est 3 (produit des racines = 6). Donc $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ et, pour $x \neq 2$,

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = x - 3 \rightarrow -1$$

— **Pourquoi c'est licite** : on simplifie pour $x \neq a$; or une limite en a ne dépend que des valeurs **autour** de a , pas en a .

— **Interprétation** : les deux courbes sont des droites « trouées » en un point.

Réponse. a) 6 · b) -1.

Correction de l'exercice 6 - Lever une forme 0/0 avec le conjugué

En remplaçant : $\frac{\sqrt{4} - 2}{0} = \frac{0}{0}$. On multiplie en haut et en bas par la **quantité conjuguée** $\sqrt{x + 4} + 2$:

$$\frac{(\sqrt{x + 4} - 2)(\sqrt{x + 4} + 2)}{x(\sqrt{x + 4} + 2)} = \frac{(x + 4) - 4}{x(\sqrt{x + 4} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{x + 4} + 2}$$

(on a simplifié par $x \neq 0$).

— En 0 : $\frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{4}$.

Autre lecture : c'est le **taux d'accroissement** de $g(x) = \sqrt{x + 4}$ entre 0 et x . Sa limite est $g'(0) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$ ✓

Réponse. La limite vaut $\frac{1}{4}$.

Correction de l'exercice 7 - Reconnaître un nombre dérivé

Si f est dérivable en a :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

a) Avec $f(x) = e^x$ et $a = 0$: $f(0) = 1$, donc $\frac{e^x - 1}{x - 0} \rightarrow f'(0) = e^0 = 1$.

b) Avec $f(x) = \sin x$, $a = 0$, $f(0) = 0$: $\frac{\sin x}{x} \rightarrow \sin'(0) = \cos 0 = 1$.

c) Avec $f(x) = e^{3x}$: $f(0) = 1$ et $f'(x) = 3e^{3x}$, donc la limite vaut $f'(0) = 3$.

— **Pourquoi** : ces trois formes sont $\frac{0}{0}$; factoriser est impossible, mais la définition du nombre dérivé les résout d'un coup.

— **Contrôle** : $\frac{\sin 0,01}{0,01} \approx 0,99998$ ✓

Réponse. a) 1 · b) 1 · c) 3.

Correction de l'exercice 8 - Deux valeurs interdites

Le numérateur vaut 1 ; tout se joue sur le **signe** de $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x^2 - 1$		+	0	-	0	+	

— En -1^- ($x < -1$) : dénominateur $\rightarrow 0^+$, donc

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$$

— En -1^+ ($-1 < x < 1$) : dénominateur $\rightarrow 0^-$, donc $f(x) \rightarrow -\infty$.

— En 1^- : dénominateur $\rightarrow 0^-$, donc $f(x) \rightarrow -\infty$.

— En 1^+ : dénominateur $\rightarrow 0^+$, donc $f(x) \rightarrow +\infty$.

Deux asymptotes verticales : $x = -1$ et $x = 1$.

— **Cohérence** : f est paire ($f(-x) = f(x)$), la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, ce que confirment les limites.

Réponse. $+\infty$ en -1^- et en 1^+ ; $-\infty$ en -1^+ et en 1^- .

Correction de l'exercice 9 - Lire des limites sur une courbe

a) **Lecture** : la courbe plonge à gauche de la droite $x = 1$ et monte à sa droite ; elle se rapproche de la droite $y = 1$ aux deux extrémités.

— $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$;

— $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$.

b) **Démonstration** :

— En 1^+ , $x - 1 \rightarrow 0^+$, donc $\frac{1}{x-1} \rightarrow +\infty$ et $f(x) \rightarrow +\infty$; en 1^- , $x - 1 \rightarrow 0^-$ et $f(x) \rightarrow -\infty$.

— En $\pm\infty$, $x - 1 \rightarrow \pm\infty$, donc

$$\frac{1}{x-1} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad f(x) \rightarrow 1$$

Conclusion : $x = 1$ est asymptote verticale, $y = 1$ asymptote horizontale. La courbe est une hyperbole, image de celle de $\frac{1}{x}$ par la translation de vecteur $(1 ; 1)$.

Réponse. $-\infty$ en 1^- , $+\infty$ en 1^+ , 1 en $\pm\infty$.

Correction de l'exercice 10 - Recoller deux morceaux

a) À gauche de 1, $f(x) = x^2$, polynôme : on remplace.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1^2 = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2 \times 1 + a = 2 + a$$

b) La limite en 1 existe si les limites **à gauche et à droite sont égales** (et égales à $f(1) = 2 + a$) :

— $2 + a = 1 \Leftrightarrow a = -1$.

— Pour $a = -1$, la courbe se raccorde sans saut au point $(1 ; 1)$; pour toute autre valeur, elle présente un **saut** de hauteur $|1 + a|$.

— **Remarque** : pour $a = -1$, la droite $y = 2x - 1$ est même **tangente** à la parabole en $(1 ; 1)$, puisque la dérivée de x^2 en 1 vaut 2.

Réponse. a) 1 et $2 + a$ · b) $a = -1$.

Correction de l'exercice 11 - Valeur absolue en zéro

On utilise la définition de la valeur absolue :

$$|x| = x \text{ si } x \geq 0 \quad |x| = -x \text{ si } x < 0$$

a) Pour $x > 0$: $f(x) = \frac{x}{x} = 1$; pour $x < 0$: $f(x) = \frac{-x}{x} = -1$.

— $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$: **pas de limite** en 0 (saut).

b) Pour $x > 0$: $g(x) = \frac{x^2 + x}{x} = x + 1 \rightarrow 1$.

Pour $x < 0$: $g(x) = \frac{x^2 - x}{x} = x - 1 \rightarrow -1$.

— Là encore, les limites latérales diffèrent : g n'a pas de limite en 0.

— **Piège** : ne jamais simplifier $\frac{|x|}{x}$ en 1 ; il faut **distinguer les cas**.

Réponse. f : 1 à droite, -1 à gauche · g : 1 à droite, -1 à gauche.

Correction de l'exercice 12 - Exponentielle d'un inverse

On compose les limites : on pose $X = \frac{1}{x}$.

— **À droite** : $X \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow 0^+$, et $e^X \rightarrow +\infty$ quand $X \rightarrow +\infty$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty$$

— **À gauche** : $X \rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow 0^-$, et $e^X \rightarrow 0$ quand $X \rightarrow -\infty$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = 0$$

Interprétation : d'un côté, l'axe des ordonnées est asymptote verticale ; de l'autre, la courbe arrive « en douceur » à l'origine.

— **Contrôle** : $e^{1/0,1} = e^{10} \approx 22\,026$ et $e^{-10} \approx 4,5 \times 10^{-5}$ ✓

Réponse. $+\infty$ à droite de 0, 0 à gauche.

Correction de l'exercice 13 - Coût moyen de production

On simplifie d'abord : $M(x) = \frac{x^2 + 100}{x} = x + \frac{100}{x}$.

a) Quand $x \rightarrow 0^+$: $x \rightarrow 0$ et $\frac{100}{x} \rightarrow +\infty$, donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} M(x) = +\infty$$

Interprétation : les 100 milliers d'euros de **coûts fixes** (machines, locaux) sont répartis sur très peu d'objets ; chaque objet coûte alors extrêmement cher.

b) En $+\infty$: $x \rightarrow +\infty$ et $\frac{100}{x} \rightarrow 0$, donc $M(x) \rightarrow +\infty$. Produire énormément fait exploser le coût variable x^2 .

— **Conséquence** : entre les deux, il existe une production optimale. Avec

$$M'(x) = 1 - \frac{100}{x^2}, \text{ elle est atteinte pour } x = 10, \text{ avec } M(10) = 20.$$

Réponse. a) $+\infty$ (coûts fixes) · b) $+\infty$.

Correction de l'exercice 14 - Rendre une limite finie

a) Pour $a = 0$: le numérateur tend vers $4 + 6 = 10 > 0$ et le dénominateur vers 0.

— En $2^+ : \frac{10}{0^+} \rightarrow +\infty$; en $2^- : \frac{10}{0^-} \rightarrow -\infty$.

b) Si le numérateur tend vers un nombre **non nul**, la limite est infinie. Il faut donc que le numérateur **s'annule en 2** :

$$4 + 2a + 6 = 0 \Leftrightarrow a = -5$$

— Alors $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ et, pour $x \neq 2$, $f(x) = x - 3$.

— La limite vaut $2 - 3 = -1$.

— **Méthode** : pour éviter une asymptote verticale en a , on impose que a soit aussi racine du numérateur, puis on factorise.

Réponse. a) $-\infty$ en 2^- , $+\infty$ en 2^+ · b) $a = -5$, limite -1 .

Correction de l'exercice 15 - Lentille et image à l'infini

a) Le numérateur tend vers 9 et $x - 3 \rightarrow 0^+$ (car $x > 3$) :

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} p(x) = \frac{9}{0^+} = +\infty$$

Interprétation : un objet placé tout près du foyer donne une image **rejetée à l'infini** — c'est le principe du projecteur de diapositives ou de la lampe de phare.

b) En $+\infty$ (même degré en haut et en bas) :

$$p(x) = \frac{3}{1 - \frac{3}{x}} \rightarrow 3$$

Interprétation : un objet très lointain (une étoile) donne une image **au foyer**, à 3 cm de la lentille — c'est pour cela qu'une loupe concentre les rayons du soleil en un point situé à la distance focale.

— **Contrôle** : $p(6) = \frac{18}{3} = 6$ (objet et image symétriques à deux fois la focale) ✓

Réponse. a) $+\infty$: image à l'infini · b) 3 : image au foyer.