

Plaquette 3 - Opérations et formes indéterminées

Limites de fonctions — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Somme : $l + l'$; $l + (+\infty) = +\infty$; $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$; mais $(+\infty) + (-\infty)$ est **indéterminée**.

Produit : $l \times (\pm\infty) = \pm\infty$ avec la **règle des signes** si $l \neq 0$; $\infty \times \infty = \infty$; mais $0 \times \infty$ est **indéterminée**.

Quotient : $\frac{l}{\pm\infty} = 0$; $\frac{l}{0^\pm} = \pm\infty$ si $l \neq 0$; mais $\frac{\infty}{\infty}$ et $\frac{0}{0}$ sont **indéterminées**.

Les quatre formes indéterminées :

$$\infty - \infty \quad 0 \times \infty \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \frac{0}{0}$$

Comment les lever :

- factoriser par le **terme dominant** (polynômes, puissances, exponentielles) ;
- **simplifier** par $(x - a)$ en un point a ;
- multiplier par la **quantité conjuguée** avec des racines ;
- **croissances comparées** : $\frac{e^x}{x^n} \rightarrow +\infty$ et $x^n e^{-x} \rightarrow 0$ en $+\infty$; $x e^x \rightarrow 0$ en $-\infty$.

Composition : si $u(x) \rightarrow b$ et $v(X) \rightarrow c$ quand $X \rightarrow b$, alors $v(u(x)) \rightarrow c$.

Correction de l'exercice 1 - Reconnaître les formes indéterminées

On applique les tableaux d'opérations ; quatre formes sont indéterminées :

$$\infty - \infty \quad 0 \times \infty \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \frac{0}{0}$$

- $(+\infty) \times (-3)$: produit par un réel **négatif**, limite $-\infty$.
- $(+\infty) + (-\infty)$: **forme indéterminée**.
- $0 \times (+\infty)$: **forme indéterminée**.
- $\frac{5}{0^-}$: numérateur positif, dénominateur qui tend vers 0 par valeurs négatives, limite $-\infty$.
- $\frac{-\infty}{+\infty}$: **forme indéterminée**.
- $\frac{2}{-\infty}$: un nombre fixe divisé par une quantité infinie, limite 0.

— **Attention** : « indéterminée » ne veut pas dire « la limite n'existe pas » ; cela veut dire que les règles ne permettent pas de conclure **sans transformer** l'expression.

Réponse. a) $-\infty$ · b) FI · c) FI · d) $-\infty$ · e) FI · f) 0.

Correction de l'exercice 2 - Une somme à trois endroits

On étudie chaque terme séparément, puis on applique la règle de la **somme**.

- **En** $+\infty$: $x^2 \rightarrow +\infty$ et $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, donc $f(x) \rightarrow +\infty$.
- **En** 0^+ : $x^2 \rightarrow 0$ et $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$, donc $f(x) \rightarrow +\infty$.

— En 0^- : $x^2 \rightarrow 0$ et $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$, donc $f(x) \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

— Aucune forme indéterminée ici : un terme a une limite **finie**, l'autre impose la sienne.

— L'axe des ordonnées est **asymptote verticale**.

Réponse. $+\infty$ en $+\infty$ et en 0^+ ; $-\infty$ en 0^- .

Correction de l'exercice 3 - Un produit 0 fois infini

Chaque fois, un facteur tend vers 0 et l'autre vers $+\infty$: forme $0 \times \infty$. On **développe ou simplifie** avant de conclure.

a) $\frac{1}{x}(x^2 + 1) = x + \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$.

b) $\sqrt{x} \times \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ (car $x = \sqrt{x} \times \sqrt{x}$), donc la limite vaut 0.

c) $\frac{1}{x^2}(3x^2 - x) = 3 - \frac{1}{x}$, donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}(3x^2 - x) = 3$$

— **Leçon** : la même forme $0 \times \infty$ donne ici $+\infty$, 0 et 3. C'est la définition même d'une forme **indéterminée** : le résultat dépend de la « vitesse » de chaque facteur.

Réponse. a) $+\infty$ · b) 0 · c) 3.

Correction de l'exercice 4 - Infini moins infini, ou pas

a) En $-\infty$: $x^3 \rightarrow -\infty$ et $-100x^2 \rightarrow -\infty$. La somme tend vers $-\infty$: **pas** d'indétermination.

b) En $+\infty$: $x^3 \rightarrow +\infty$ et $-100x^2 \rightarrow -\infty$, forme $\infty - \infty$. On factorise par le terme dominant :

$$f(x) = x^3 \left(1 - \frac{100}{x} \right)$$

La parenthèse tend vers 1, donc $f(x) \rightarrow +\infty$.

c) $f(50) = 125\,000 - 250\,000 = -125\,000 < 0$ et

$f(200) = 8\,000\,000 - 4\,000\,000 = 4\,000\,000$.

— La limite est $+\infty$, mais la fonction ne devient positive qu'à partir de $x = 100$ (racine de $1 - \frac{100}{x}$).

— **À retenir** : la limite décrit le comportement « à la fin », pas pour les valeurs raisonnables de x .

Réponse. a) $-\infty$ · b) $+\infty$ · c) f ne devient positive qu'après 100.

Correction de l'exercice 5 - Un quotient avec racine

Forme $\frac{\infty}{\infty}$ (le numérateur est lui-même une forme $\infty - \infty$). On factorise en haut et en bas par x , le terme dominant :

$$\frac{2x - \sqrt{x}}{x + 1} = \frac{x \left(2 - \frac{\sqrt{x}}{x} \right)}{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = \frac{2 - \frac{1}{\sqrt{x}}}{1 + \frac{1}{x}}$$

— On a utilisé $\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

— $\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$ et $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, donc la limite vaut $\frac{2}{1} = 2$.

— **À retenir** : $\sqrt{x}$ est « négligeable » devant x en $+\infty$, comme x l'est devant x^2 .

Réponse. La limite vaut 2.

Correction de l'exercice 6 - Factoriser un cube

En remplaçant : $\frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$, forme indéterminée.

Vérification de la factorisation :

$$(x-1)(x^2+x+1) = x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 = x^3 - 1$$

— Pour $x \neq 1$: $\frac{x^3-1}{x-1} = x^2 + x + 1$.

— Limite en 1 : $1 + 1 + 1 = 3$.

Autre regard : c'est le taux d'accroissement de $x \mapsto x^3$ en 1 ; sa limite est la dérivée $3x^2$ en 1, soit 3 ✓

— **Généralisation** : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = n$.

Réponse. La limite vaut 3.

Correction de l'exercice 7 - Deux conjugués en l'infini

Deux formes $\infty - \infty$ avec des racines : **quantité conjuguée**, en utilisant $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

a) On multiplie par $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$ en haut et en bas :

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \frac{(x+1) - (x-1)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} \rightarrow 0$$

$$b) x - \sqrt{x^2 - 2x} = \frac{x^2 - (x^2 - 2x)}{x + \sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{2x}{x + \sqrt{x^2 - 2x}}$$

— Pour $x > 2$: $\sqrt{x^2 - 2x} = x\sqrt{1 - \frac{2}{x}}$, donc

$$\frac{2x}{x\left(1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x}}\right)} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x}}} \rightarrow \frac{2}{2} = 1$$

— **Contrôle** pour b) : en $x = 1\,000$, $1\,000 - \sqrt{998\,000} \approx 1,0005$ ✓

Réponse. a) 0 · b) 1.

Correction de l'exercice 8 - Exponentielles en compétition

a) En $+\infty$, forme $\frac{\infty}{\infty}$. L'exponentielle domine : on factorise par e^x .

$$f(x) = \frac{e^x(1 - xe^{-x})}{e^x(1 + xe^{-x})} = \frac{1 - xe^{-x}}{1 + xe^{-x}}$$

Par **croissances comparées**, $xe^{-x} \rightarrow 0$: $f(x) \rightarrow 1$.

b) En $-\infty$, $e^x \rightarrow 0$: c'est maintenant x qui domine. On factorise par x ($x \neq 0$) :

$$f(x) = \frac{x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right)}{x\left(\frac{e^x}{x} + 1\right)} = \frac{\frac{e^x}{x} - 1}{\frac{e^x}{x} + 1}$$

— $\frac{e^x}{x} \rightarrow \frac{0}{-\infty} = 0$, donc $f(x) \rightarrow \frac{-1}{1} = -1$.

— **Leçon** : le terme dominant n'est pas le même des deux côtés.

Réponse. a) 1 · b) -1.

Correction de l'exercice 9 - Une différence d'exponentielles

En $+\infty$: $e^{2x} \rightarrow +\infty$ et $e^x \rightarrow +\infty$, forme $\infty - \infty$. On factorise par le terme dominant e^{2x} :

$$f(x) = e^{2x}(1 - e^{-x})$$

(car $\frac{e^x}{e^{2x}} = e^{-x}$). Or $e^{-x} \rightarrow 0$, la parenthèse tend vers 1, donc $f(x) \rightarrow +\infty$.

Autre factorisation, souvent plus naturelle : $f(x) = e^x(e^x - 1)$, produit de deux facteurs qui tendent vers $+\infty$.

En $-\infty$: $e^{2x} \rightarrow 0$ et $e^x \rightarrow 0$, donc $f(x) \rightarrow 0 - 0 = 0$ (pas d'indétermination).

— **Signe** : $f(x) = e^x(e^x - 1)$ est négatif pour $x < 0$: la courbe approche l'axe des abscisses par en dessous.

Réponse. $+\infty$ en $+\infty$; 0 en $-\infty$.

Correction de l'exercice 10 - Composer avec une racine

On applique la **limite d'une composée** : limite de l'intérieur, puis de l'extérieur.

a) **Intérieur** : $X = \frac{4x^2 + 1}{x^2 + 3} \rightarrow 4$ (quotient de même degré).

Extérieur : $\sqrt{X} \rightarrow \sqrt{4} = 2$ quand $X \rightarrow 4$ (racine continue en 4).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 1}{x^2 + 3}} = 2$$

b) **Intérieur** : $X = \frac{1-x}{x+2} = \frac{\frac{1}{x} - 1}{1 + \frac{2}{x}} \rightarrow -1$.

Extérieur : $e^X \rightarrow e^{-1}$.

— La limite vaut $e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,368$.

— **Piège** : ne pas « passer la racine » terme à terme : $\sqrt{4x^2 + 1} \neq 2x + 1$.

Réponse. a) 2 · b) e^{-1} .

Correction de l'exercice 11 - Démontrer une croissance comparée

a) Pour $x > 0$, on divise l'inégalité par $x > 0$ (le sens est conservé) :

$$\frac{e^x}{x} \geq \frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2}$$

— Le membre de droite tend vers $0 + 1 + \infty = +\infty$.

— Par **comparaison** (minoration), $\frac{e^x}{x} \rightarrow +\infty$.

b) $x e^{-x} = \frac{x}{e^x} = \frac{1}{\frac{e^x}{x}}$.

— Le dénominateur tend vers $+\infty$ d'après a), donc $x e^{-x} \rightarrow 0$.

— **Pourquoi le terme en x^2** : avec seulement $e^x \geq 1 + x$, on obtiendrait $\frac{e^x}{x} \geq \frac{1}{x} + 1$, qui tend vers 1 — insuffisant pour conclure.

Réponse. a) $+\infty$ · b) 0.

Correction de l'exercice 12 - Corriger un raisonnement

a) $+\infty - \infty$ n'est pas un calcul : c'est une **forme indéterminée**. « L'infini moins l'infini » n'a aucune raison de valoir 0 ; le résultat dépend de la **vitesse** à laquelle chaque terme grandit.

b) On factorise par le terme dominant :

$$x^2 - x = x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) \rightarrow +\infty$$

car la parenthèse tend vers 1.

c) Il suffit de prendre $u(x) = x + 5$ et $v(x) = x$: les deux tendent vers $+\infty$, et $u(x) - v(x) = 5$ pour tout x .

— De même, $u(x) = x^2$ et $v(x) = x$ donnent $+\infty$; $u(x) = x$ et $v(x) = x^2$ donnent $-\infty$.

— **Moralité** : une forme indéterminée peut conduire à **n'importe quel** résultat ; seule une transformation de l'expression permet de conclure.

Réponse. a) FI, pas 0 · b) $+\infty$ · c) $u = x + 5$, $v = x$.

Correction de l'exercice 13 - Polynôme et racine

Forme $\infty - \infty$. On factorise par $\sqrt{x}$ (car $x = \sqrt{x} \times \sqrt{x}$) :

$$x - 3\sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 3)$$

— $\sqrt{x} \rightarrow +\infty$ et $\sqrt{x} - 3 \rightarrow +\infty$, donc le produit tend vers $+\infty$.

Signe sur $]0; +\infty[$: $\sqrt{x} > 0$, donc le signe est celui de $\sqrt{x} - 3$.

— $\sqrt{x} - 3 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 3 \Leftrightarrow x > 9$ (la fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$).

— **Bilan** : $x - 3\sqrt{x} > 0$ sur $]9; +\infty[$; la factorisation sert **à la fois** pour la limite et pour le signe.

— **Contrôle** : en $x = 16$, $16 - 12 = 4 > 0$; en $x = 4$, $4 - 6 = -2 < 0$ ✓

Réponse. Limite $+\infty$; $x - 3\sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow x > 9$.

Correction de l'exercice 14 - Discuter selon un paramètre

Si $m \neq 0$, le terme dominant est mx^3 :

$$g(x) = x^3 \left(m - \frac{1}{x}\right)$$

La parenthèse tend vers m , et $x^3 \rightarrow +\infty$.

— Si $m > 0$: $g(x) \rightarrow +\infty$.

— Si $m < 0$: $g(x) \rightarrow -\infty$.

Si $m = 0$: $g(x) = -x^2 \rightarrow -\infty$ (le terme de degré 3 a disparu).

Valeur de m	$m < 0$	$m = 0$	$m > 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

— **Piège** : pour $m = 0$, la factorisation par x^3 reste vraie mais donne la forme $(+\infty) \times 0$: il faut traiter ce cas **à part**.

— **Contrôle** pour $m = 0,01$: $g(1\,000) = 10\,000\,000 - 1\,000\,000 > 0$ ✓

Réponse. $+\infty$ si $m > 0$; $-\infty$ si $m \leq 0$.

Correction de l'exercice 15 - Étude complète des limites

a) $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ s'annule en 1 et 2 : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$.

b) **En** $\pm\infty$ (même degré) : $f(x) \rightarrow \frac{1}{1} = 1$.

En 1 : le numérateur tend vers $1 - 4 = -3$. Signe du dénominateur $(x - 1)(x - 2)$ près de 1 : $x - 2 \approx -1 < 0$, donc

— en 1^- , $x - 1 < 0$ et le produit est positif : $\frac{-3}{0^+} \rightarrow -\infty$;

— en 1^+ , $x - 1 > 0$ et le produit est négatif : $\frac{-3}{0^-} \rightarrow +\infty$.

En 2 : forme $\frac{0}{0}$. On factorise : $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$, et pour $x \neq 2$,

$$f(x) = \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{x + 2}{x - 1} \rightarrow \frac{4}{1} = 4$$

c) **Asymptotes** : horizontale $y = 1$ en $\pm\infty$; verticale $x = 1$. En $x = 2$, **pas** d'asymptote : la limite est finie (trou au point $(2; 4)$).

Réponse. $y = 1$ en $\pm\infty$; $x = 1$ (limites $-\infty$ puis $+\infty$) ; en 2, limite 4.