Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : croissances comparées, conjugué et asymptotes

Limites de fonctions — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formes indéterminées : $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\times\infty$, $\infty-\infty$. Une forme indéterminée **n'est pas** une absence de limite : il faut transformer l'expression.

Techniques, dans l'ordre à essayer.

1. **Factoriser par le terme dominant** (quotients de polynômes, en $\pm\infty$) :

$$\frac{3x^2-x+1}{2x^2+5}=\frac{x^2\left(3-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2+\frac{5}{x^2}\right)}\longrightarrow\frac{3}{2}$$

2. **Factoriser puis simplifier** (forme $\frac{0}{0}$ en un point) : le facteur $(x-a)$ s'élimine. 3. **Quantité conjuguée** (présence de racines) : multiplier par $\sqrt{A}+\sqrt{B}$. 4. **Croissances comparées** :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x^n}=+\infty\qquad\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0\qquad\lim_{x\to0^+}x\ln x=0$$

5. **Taux de variation** : $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\to f'(a)$.

Limites usuelles en 0 : $\frac{\sin x}{x}\to1$, $\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\to1$, $\frac{\ln(1+x)}{x}\to1$.

Asymptotes.

- **Verticale** $x=a$ si $\lim_{x\to a}f=\pm\infty$.
- **Horizontale** $y=\ell$ si $\lim_{x\to\pm\infty}f=\ell$.
- **Oblique** $y=ax+b$ si $f(x)-(ax+b)\to0$; on l'obtient par **division euclidienne**.
- **Position** : donnée par le **signe** de $f(x)-(ax+b)$.

Théorèmes de comparaison : gendarmes pour une limite **finie**, minoration/majoration pour une limite **infinie**.

Correction de l'exercice 1 – Quotient de polynômes en l'infini

Première limite. On factorise par x^2 au numérateur et au dénominateur :

$$\frac{x^2\left(2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}=\frac{2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{4}{x^2}}\longrightarrow\frac{2}{1}=2$$

Seconde limite. Les degrés diffèrent : on factorise par x^3 au dénominateur.

$$\frac{x^2+1}{x^3-2}=\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(1-\frac{2}{x^3}\right)}=\frac{1}{x}\times\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^3}}\longrightarrow0$$

- **Règle** : degrés **égaux** → quotient des coefficients dominants ; degré du **dénominateur plus grand** → limite 0 ; degré du **numérateur plus grand** → limite

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

infinie.

— **Contrôles** : en $x = 100$, la première vaut $\frac{19\,701}{10\,004} \approx 1{,}9693$ ✓ ; la seconde $\frac{10\,001}{999\,998} \approx 0{,}0100$ ✓

Réponse. 2 et 0.

Correction de l'exercice 2 – Forme 0/0 par factorisation

— **Vérification de la forme** : en $x = 3$, numérateur $9 - 9 = 0$ et dénominateur $9 - 12 + 3 = 0$ — forme $\frac{0}{0}$.

— **Factorisations** : $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$ et $x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1)$ (racines 1 et 3, somme 4, produit 3).

— On **simplifie** par $x - 3$, licite car $x \neq 3$:

$$\frac{x^2 - 9}{x^2 - 4x + 3} = \frac{x+3}{x-1}$$

— **Limite** : en $x = 3$, cela vaut $\frac{6}{2} = 3$.

— **Contrôle** : en $x = 3{,}01$, le quotient vaut $\frac{0{,}0601}{0{,}0201} \approx 2{,}990$ ✓

— **Méthode** : un facteur $(x - a)$ commun se factorise **toujours** quand les deux termes s'annulent en a — c'est le théorème « a racine ⇒ $(x - a)$ divise ».

Réponse. La limite vaut 3.

Correction de l'exercice 3 – Quantité conjuguée

— **Forme** $\infty - \infty$: on multiplie par la **quantité conjuguée** $\sqrt{x^2 + 3x} + x$.

$$\sqrt{x^2 + 3x} - x = \frac{\left(x^2 + 3x\right) - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x}$$

— On **factorise par** x au dénominateur (avec $x > 0$, donc $\sqrt{x^2} = x$) :

$$= \frac{3x}{x\left(\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + 1\right)} = \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + 1} \longrightarrow \frac{3}{2} = 1{,}5$$

— **Contrôle** : en $x = 1000$, $\sqrt{1\,003\,000} - 1000 \approx 1{,}4989$ ✓

— **Interprétation** : la courbe de $\sqrt{x^2 + 3x}$ admet l'**asymptote oblique** $y = x + 1{,}5$ en $+\infty$.

— **Attention en** $-\infty$: on aurait $\sqrt{x^2} = |x| = -x$, ce qui change tout le calcul.

Réponse. La limite vaut $\frac{3}{2}$.

Correction de l'exercice 4 – Conjugué en un point

— **Forme** $\frac{0}{0}$ (en $x = 4$, $\sqrt{4} - 2 = 0$).

— **Conjugué** $\sqrt{x} + 2$:

$$\frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \frac{x - 4}{(x-4)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$$

— **Limite** : $\frac{1}{2 + 2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Lecture alternative** : c'est le **taux de variation** de $\sqrt{\cdot}$ en 4, donc la dérivée $\dfrac{1}{2\sqrt{4}} = \dfrac{1}{4}$ ✓

— **Contrôle** : en $x = 4{,}1$, $\dfrac{\sqrt{4{,}1} - 2}{0{,}1} = \dfrac{0{,}024845}{0{,}1} \approx 0{,}2485$ ✓

— **Réflexe** : devant $\sqrt{A} - \sqrt{B}$, multiplier par le conjugué transforme la différence en une **différence de carrés**, qui se simplifie.

Réponse. La limite vaut $\dfrac{1}{4}$.

Correction de l'exercice 5 – Croissances comparées avec exponentielle

— **Première limite** : l'exponentielle **domine** toute puissance, donc $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^3} \to +\infty$.

— **Seconde limite** : $x^2\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x}$, qui est l'inverse d'une quantité tendant vers $+\infty$ — donc la limite est 0.

— **Contrôles numériques** : $\dfrac{\mathrm{e}^{10}}{1000} \approx 22{,}03$ et $\dfrac{\mathrm{e}^{20}}{8000} \approx 60\,646$ — la croissance est spectaculaire ✓

— Pour la seconde : $100\,\mathrm{e}^{-10} \approx 4{,}54 \times 10^{-3}$ et $400\,\mathrm{e}^{-20} \approx 8{,}2 \times 10^{-7}$ ✓

— **Hiérarchie à mémoriser** : en $+\infty$, $\ln x \ll x^n \ll \mathrm{e}^x$ — chaque terme est **négligeable** devant le suivant.

— **Piège** : $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^3}$ est une forme $\dfrac{\infty}{\infty}$; seule la hiérarchie permet de trancher, pas la factorisation.

Réponse. $+\infty$ et 0.

Correction de l'exercice 6 – Croissances comparées avec logarithme

— **Première limite** : toute puissance positive domine le logarithme, donc $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} \to 0$.

— **Justification** : en posant $t = \sqrt{x} \to +\infty$, l'expression devient $\dfrac{2\ln t}{t} \to 0$ ✓

— **Seconde limite** : forme $0 \times (-\infty)$. On sait que $x\ln x \to 0$ en 0^+, donc

$$x^2 \ln x = x \times (x \ln x) \longrightarrow 0 \times 0 = 0$$

— **Contrôles** : $\dfrac{\ln 100}{10} = 0{,}4605$ et $\dfrac{\ln 10^6}{1000} = 0{,}0138$ ✓ ; $0{,}01^2 \ln 0{,}01 = -4{,}6 \times 10^{-4}$ ✓

— **Signe** : $x^2 \ln x$ est **négatif** sur $]0\,;1[$ et tend vers 0 par valeurs négatives.

— **Application typique** : ces limites décident du comportement de $x \mapsto x\ln x$ et de ses variantes en 0, là où la fonction n'est pas définie.

Réponse. Les deux limites valent 0.

Correction de l'exercice 7 – Asymptote verticale

— **En** 3 : le numérateur tend vers $7 > 0$, le dénominateur vers 0 — il faut étudier son **signe**.

— Pour $x \to 3^-$: $x - 3 < 0$, donc $f(x) \to -\infty$.

— Pour $x \to 3^+$: $x - 3 > 0$, donc $f(x) \to +\infty$.

— **Asymptote verticale** : la droite $x = 3$.

— **En** $\pm\infty$: on factorise, $\dfrac{x\left(2 + \frac{1}{x}\right)}{x\left(1 - \frac{3}{x}\right)} \to 2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Asymptote horizontale** : la droite $y = 2$.
— **Position** : $f(x) - 2 = \dfrac{2x+1-2x+6}{x-3} = \dfrac{7}{x-3}$, **positive** pour $x > 3$ (courbe au-dessus) et négative pour $x < 3$.
— **Contrôles** : $f(3{,}1) = \dfrac{7{,}2}{0{,}1} = 72$ ✓ ; $f(2{,}9) = \dfrac{6{,}8}{-0{,}1} = -68$ ✓ ; $f(1000) \approx 2{,}007$ ✓

Réponse. Asymptotes $x = 3$ (verticale) et $y = 2$ (horizontale).

Correction de l'exercice 8 – Asymptote oblique

— **Division euclidienne** : $x^2 + 2x - 1 = (x+1)(x+1) - 2$.
— **Vérification** : $(x+1)^2 - 2 = x^2 + 2x + 1 - 2 = x^2 + 2x - 1$ ✓

$$f(x) = x + 1 - \frac{2}{x+1}$$

— **Asymptote** : $\dfrac{2}{x+1} \to 0$ en $\pm\infty$, donc la droite $y = x + 1$ est **asymptote oblique** aux deux extrémités.
— **Position** : $f(x) - (x+1) = -\dfrac{2}{x+1}$.
— Pour $x > -1$: c'est **négatif**, la courbe est **en dessous** de l'asymptote.
— Pour $x < -1$: c'est **positif**, la courbe est **au-dessus**.
— **Contrôles** : $f(10) = \dfrac{119}{11} \approx 10{,}818$, et l'asymptote donne 11 — écart $-0{,}182 \approx -\dfrac{2}{11}$ ✓
— **Méthode systématique** : la division euclidienne du numérateur par le dénominateur donne **directement** l'asymptote et le reste.

Réponse. Asymptote $y = x + 1$; courbe en dessous si $x > -1$, au-dessus sinon.

Correction de l'exercice 9 – Limite avec valeur absolue

— **À droite** ($x > 2$) : $x - 2 > 0$ donc $|x-2| = x - 2$, et le quotient vaut 1. La limite est 1.
— **À gauche** ($x < 2$) : $x - 2 < 0$ donc $|x-2| = -(x-2)$, et le quotient vaut -1. La limite est -1.
— **Conclusion** : les deux limites latérales **diffèrent**, donc f **n'a pas de limite** en 2.
— **Nature** : c'est une **discontinuité de saut** (saut d'amplitude 2).
— **Règle** : une fonction admet une limite en a **si et seulement si** les deux limites latérales existent et sont **égales**.
— **Cas voisin à ne pas confondre** : $\dfrac{|x-2|}{(x-2)^2}$ tend vers $+\infty$ **des deux côtés** — là, la limite existe (infinie).

Réponse. 1 à droite, -1 à gauche : pas de limite en 2.

Correction de l'exercice 10 – Théorème des gendarmes

— **Encadrement du numérateur** : $-1 \leq \cos x \leq 1$, donc $2x - 1 \leq \cos x + 2x \leq 2x + 1$.
— Le dénominateur $x + 1$ est **positif** pour $x > 0$, l'encadrement se conserve :

$$\frac{2x-1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{2x+1}{x+1}$$

— **Limites des bornes** : en factorisant par x, les deux tendent vers 2.
— **Gendarmes** : $f(x) \to 2$.
— **Contrôles** : $f(100) = \dfrac{\cos 100 + 200}{101} \approx \dfrac{200{,}86}{101} \approx 1{,}9887$ ✓

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Pourquoi les gendarmes ?** $\cos x$ n'a **aucune limite** en $+\infty$ — on ne peut pas passer à la limite terme à terme. L'encadrement contourne l'obstacle.
— **Asymptote** : la droite $y = 2$ est asymptote horizontale, la courbe oscillant autour d'elle.

Réponse. La limite vaut 2.

Correction de l'exercice 11 – Limite d'une composée

Première limite. On pose $u = -\frac{1}{x}$.

— Quand $x \to +\infty$, $u \to 0$, donc par **composition** $\mathrm{e}^u \to \mathrm{e}^0 = 1$.

Seconde limite. Quand $x \to 0^+$, $\frac{1}{x} \to +\infty$ donc $u = -\frac{1}{x} \to -\infty$.

— Par composition, $\mathrm{e}^u \to 0$.
— **Contrôles** : $\mathrm{e}^{-1/100} = 0{,}99005$ ✓ ; $\mathrm{e}^{-1/0{,}01} = \mathrm{e}^{-100} \approx 3{,}7 \times 10^{-44}$ ✓
— **Conséquence** : la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-1/x}$ se **prolonge par continuité** en 0 par la valeur 0, et admet $y = 1$ pour asymptote horizontale en $+\infty$.
— **Méthode** : pour une composée, on détermine d'abord la limite de la fonction **intérieure**, puis on l'injecte dans la fonction extérieure.

Réponse. 1 en $+\infty$ et 0 en 0^+.

Correction de l'exercice 12 – Limite et taux de variation

Première limite. On fait apparaître la limite de référence en multipliant et divisant par 2 :

$$\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{x} = 2 \times \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{2x} \longrightarrow 2 \times 1 = 2$$

— **Lecture par la dérivée** : c'est le taux de variation en 0 de $x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$, dont la dérivée est $2\mathrm{e}^{2x}$, valant 2 en 0 ✓

Seconde limite. Même technique avec le facteur 3 :

$$\frac{\ln(1+3x)}{x} = 3 \times \frac{\ln(1+3x)}{3x} \longrightarrow 3$$

— **Contrôles** : en $x = 0{,}001$, $\frac{\mathrm{e}^{0{,}002}-1}{0{,}001} \approx 2{,}002$ ✓ et $\frac{\ln(1{,}003)}{0{,}001} \approx 2{,}9955$ ✓
— **Règle générale** : $\frac{\mathrm{e}^{ax}-1}{x} \to a$ et $\frac{\ln(1+ax)}{x} \to a$ — le coefficient de x sort tel quel.

Réponse. 2 et 3.

Correction de l'exercice 13 – Limite d'un produit indéterminé

— **Forme** $\infty \times 0$: on utilise la **quantité conjuguée** dans la parenthèse.

$$\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 1 = \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}$$

— En multipliant par x, le facteur $\frac{1}{x}$ **disparaît** :

$$x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 1\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} \longrightarrow \frac{1}{2} = 0{,}5$$

— **Contrôle** : en $x = 1000$, $1000\left(\sqrt{1{,}001} - 1\right) = 1000 \times 4{,}9988 \times 10^{-4} \approx 0{,}49988$ ✓

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Autre voie** : poser $h = \frac{1}{x} \to 0$ ramène l'expression à $\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$, taux de variation de $\sqrt{\cdot}$ en 1, donc $\frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$ ✓

— **Leçon** : une forme $\infty \times 0$ se transforme presque toujours en $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ par une réécriture.

Réponse. La limite vaut $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 14 – Étude complète d'une fonction

— **Domaine** : $x^2 - 1 \neq 0$, donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

— **En** $\pm\infty$: $\frac{x^2}{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} \to 1$ — asymptote **horizontale** $y = 1$.

— **En** 1 : le numérateur tend vers $1 > 0$; $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ est **négatif** sur $]-1\,;1[$ et positif après.

— Donc $f(x) \to -\infty$ en 1^- et $+\infty$ en 1^+ — asymptote **verticale** $x = 1$.

— **En** -1 : par **parité** (f est paire, $f(-x) = f(x)$), on a $f \to +\infty$ en $(-1)^-$ et $-\infty$ en $(-1)^+$ — asymptote **verticale** $x = -1$.

— **Position par rapport à** $y = 1$: $f(x) - 1 = \frac{x^2 - x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{1}{x^2 - 1}$, **positive** pour $|x| > 1$ (courbe au-dessus) et négative sur $]-1\,;1[$.

— **Contrôles** : $f(0) = 0$ ✓ ; $f(2) = \frac{4}{3} \approx 1{,}333 > 1$ ✓ ; $f(0{,}5) = \frac{0{,}25}{-0{,}75} \approx -0{,}333 < 1$ ✓

Réponse. $y = 1$ horizontale ; $x = \pm 1$ verticales ; courbe au-dessus de $y = 1$ si $|x| > 1$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : modèle avec asymptote

a) On factorise par t^2 au dénominateur :

$$C(t) = \frac{5t}{t^2\left(1 + \frac{4}{t^2}\right)} = \frac{5}{t} \times \frac{1}{1 + \frac{4}{t^2}} \longrightarrow 0$$

— **Interprétation** : le médicament est **entièrement éliminé** à long terme ; l'axe des abscisses est asymptote horizontale.

b) **Dérivée** (quotient) :

$$C'(t) = \frac{5\left(t^2 + 4\right) - 5t \times 2t}{\left(t^2 + 4\right)^2} = \frac{5\left(4 - t^2\right)}{\left(t^2 + 4\right)^2}$$

— Le dénominateur est positif : C' a le signe de $4 - t^2$, donc **positive** sur $[0\,;2[$ et négative après.

— **Maximum** en $t = 2$ heures, de valeur $C(2) = \frac{10}{8} = 1{,}25$ mg/L.

— **Contrôles** : $C(1) = \frac{5}{5} = 1$ ✓ ; $C(3) = \frac{15}{13} \approx 1{,}154$ ✓ — bien inférieurs à 1,25.

— **Lecture pharmacologique** : le pic de concentration est atteint **2 h** après la prise, puis la décroissance est lente (en $\frac{5}{t}$).

Réponse. a) limite 0 · b) maximum 1,25 mg/L à $t = 2$ h.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).