

Plaquette 5 - Problèmes de synthèse :
croissances comparées, conjugué et asymptotes
Limites de fonctions — Terminale spé maths
 Corrections détaillées

Boîte à outils

Formes indéterminées : $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$, $\infty - \infty$. Une forme indéterminée **n'est pas** une absence de limite : il faut transformer l'expression.

Techniques, dans l'ordre à essayer.

1. **Factoriser par le terme dominant** (quotients de polynômes, en $\pm\infty$) :

$$\frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + 5} = \frac{x^2 \left(3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left(2 + \frac{5}{x^2} \right)} \rightarrow \frac{3}{2}$$

2. **Factoriser puis simplifier** (forme $\frac{0}{0}$ en un point) : le facteur $(x - a)$ s'élimine. 3.

Quantité conjuguée (présence de racines) : multiplier par $\sqrt{A} + \sqrt{B}$. 4. **Croissances comparées :**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

5. **Taux de variation :** $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \rightarrow f'(a)$.

Limites usuelles en 0 : $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$, $\frac{e^x - 1}{x} \rightarrow 1$, $\frac{\ln(1+x)}{x} \rightarrow 1$.

Asymptotes.

- **Verticale** $x = a$ si $\lim_{x \rightarrow a} f = \pm\infty$.
- **Horizontale** $y = \ell$ si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f = \ell$.
- **Oblique** $y = ax + b$ si $f(x) - (ax + b) \rightarrow 0$; on l'obtient par **division euclidienne**.
- **Position** : donnée par le **signe** de $f(x) - (ax + b)$.

Théorèmes de comparaison : gendarmes pour une limite **finie**, minoration/majoration pour une limite **infinie**.

Correction de l'exercice 1 - Quotient de polynômes en l'infini

Première limite. On factorise par x^2 au numérateur et au dénominateur :

$$\frac{x^2 \left(2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{4}{x^2} \right)} = \frac{2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{4}{x^2}} \rightarrow \frac{2}{1} = 2$$

Seconde limite. Les degrés diffèrent : on factorise par x^3 au dénominateur.

$$\frac{x^2 + 1}{x^3 - 2} = \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}{x^3 \left(1 - \frac{2}{x^3} \right)} = \frac{1}{x} \times \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x^3}} \rightarrow 0$$

- **Règle :** degrés **égaux** $\rightarrow$ quotient des coefficients dominants ; degré du **dénominateur plus grand** $\rightarrow$ limite 0 ; degré du **numérateur plus grand** $\rightarrow$ limite

infinie.

- **Contrôles** : en $x = 100$, la première vaut $\frac{19\,701}{10\,004} \approx 1,9693 \checkmark$; la seconde $\frac{10\,001}{999\,998} \approx 0,0100 \checkmark$

Réponse. 2 et 0.

Correction de l'exercice 2 - Forme 0/0 par factorisation

- **Vérification de la forme** : en $x = 3$, numérateur $9 - 9 = 0$ et dénominateur $9 - 12 + 3 = 0$ — forme $\frac{0}{0}$.
- **Factorisations** : $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$ et $x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1)$ (racines 1 et 3, somme 4, produit 3).
- On **simplifie** par $x - 3$, licite car $x \neq 3$:

$$\frac{x^2 - 9}{x^2 - 4x + 3} = \frac{x + 3}{x - 1}$$

- **Limite** : en $x = 3$, cela vaut $\frac{6}{2} = 3$.
- **Contrôle** : en $x = 3,01$, le quotient vaut $\frac{0,0601}{0,0201} \approx 2,990 \checkmark$
- **Méthode** : un facteur $(x - a)$ commun se factorise **toujours** quand les deux termes s'annulent en a — c'est le théorème « a racine $\Rightarrow (x - a)$ divise ».

Réponse. La limite vaut 3.

Correction de l'exercice 3 - Quantité conjuguée

- **Forme $\infty - \infty$** : on multiplie par la **quantité conjuguée** $\sqrt{x^2 + 3x} + x$.

$$\sqrt{x^2 + 3x} - x = \frac{(x^2 + 3x) - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x}$$

- On **factorise** par x au dénominateur (avec $x > 0$, donc $\sqrt{x^2} = x$) :

$$= \frac{3x}{x\left(\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + 1\right)} = \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + 1} \rightarrow \frac{3}{2} = 1,5$$

- **Contrôle** : en $x = 1000$, $\sqrt{1\,003\,000} - 1000 \approx 1,4989 \checkmark$
- **Interprétation** : la courbe de $\sqrt{x^2 + 3x}$ admet l'**asymptote oblique** $y = x + 1,5$ en $+\infty$.
- **Attention en $-\infty$** : on aurait $\sqrt{x^2} = |x| = -x$, ce qui change tout le calcul.

Réponse. La limite vaut $\frac{3}{2}$.

Correction de l'exercice 4 - Conjugué en un point

- **Forme $\frac{0}{0}$** (en $x = 4$, $\sqrt{4} - 2 = 0$).

- **Conjugué** $\sqrt{x} + 2$:

$$\frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$$

- **Limite** : $\frac{1}{2 + 2} = \frac{1}{4} = 0,25$.

- **Lecture alternative** : c'est le **taux de variation** de $\sqrt{x}$ en 4, donc la dérivée $\frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$ ✓
- **Contrôle** : en $x = 4,1$, $\frac{\sqrt{4,1} - 2}{0,1} = \frac{0,024845}{0,1} \approx 0,2485$ ✓
- **Réflexe** : devant $\sqrt{A} - \sqrt{B}$, multiplier par le conjugué transforme la différence en une **différence de carrés**, qui se simplifie.

Réponse. La limite vaut $\frac{1}{4}$.

Correction de l'exercice 5 - Croissances comparées avec exponentielle

- **Première limite** : l'exponentielle **domine** toute puissance, donc $\frac{e^x}{x^3} \rightarrow +\infty$.
- **Seconde limite** : $x^2 e^{-x} = \frac{x^2}{e^x}$, qui est l'inverse d'une quantité tendant vers $+\infty$ — donc la limite est 0.
- **Contrôles numériques** : $\frac{e^{10}}{1000} \approx 22,03$ et $\frac{e^{20}}{8000} \approx 60\,646$ — la croissance est spectaculaire ✓
- Pour la seconde : $100 e^{-10} \approx 4,54 \times 10^{-3}$ et $400 e^{-20} \approx 8,2 \times 10^{-7}$ ✓
- **Hiérarchie à mémoriser** : en $+\infty$, $\ln x \ll x^n \ll e^x$ — chaque terme est **négligeable** devant le suivant.
- **Piège** : $\frac{e^x}{x^3}$ est une forme $\frac{\infty}{\infty}$; seule la hiérarchie permet de trancher, pas la factorisation.

Réponse. $+\infty$ et 0.

Correction de l'exercice 6 - Croissances comparées avec logarithme

- **Première limite** : toute puissance positive domine le logarithme, donc $\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$.
- **Justification** : en posant $t = \sqrt{x} \rightarrow +\infty$, l'expression devient $\frac{2 \ln t}{t} \rightarrow 0$ ✓
- **Seconde limite** : forme $0 \times (-\infty)$. On sait que $x \ln x \rightarrow 0$ en 0^+ , donc

$$x^2 \ln x = x \times (x \ln x) \rightarrow 0 \times 0 = 0$$
- **Contrôles** : $\frac{\ln 100}{10} = 0,4605$ et $\frac{\ln 10^6}{1000} = 0,0138$ ✓ ; $0,01^2 \ln 0,01 = -4,6 \times 10^{-4}$ ✓
- **Signe** : $x^2 \ln x$ est **négatif** sur $]0; 1[$ et tend vers 0 par valeurs négatives.
- **Application typique** : ces limites décident du comportement de $x \mapsto x \ln x$ et de ses variantes en 0, là où la fonction n'est pas définie.

Réponse. Les deux limites valent 0.

Correction de l'exercice 7 - Asymptote verticale

- **En 3** : le numérateur tend vers $7 > 0$, le dénominateur vers 0 — il faut étudier son **signe**.
- Pour $x \rightarrow 3^-$: $x - 3 < 0$, donc $f(x) \rightarrow -\infty$.
- Pour $x \rightarrow 3^+$: $x - 3 > 0$, donc $f(x) \rightarrow +\infty$.
- **Asymptote verticale** : la droite $x = 3$.
- **En $\pm\infty$** : on factorise, $\frac{x(2 + \frac{1}{x})}{x(1 - \frac{3}{x})} \rightarrow 2$.

- **Asymptote horizontale** : la droite $y = 2$.
- **Position** : $f(x) - 2 = \frac{2x+1-2x+6}{x-3} = \frac{7}{x-3}$, **positive** pour $x > 3$ (courbe au-dessus) et **négative** pour $x < 3$.
- **Contrôles** : $f(3,1) = \frac{7,2}{0,1} = 72 \checkmark$; $f(2,9) = \frac{6,8}{-0,1} = -68 \checkmark$; $f(1000) \approx 2,007 \checkmark$

Réponse. Asymptotes $x = 3$ (verticale) et $y = 2$ (horizontale).

Correction de l'exercice 8 - Asymptote oblique

- **Division euclidienne** : $x^2 + 2x - 1 = (x + 1)(x + 1) - 2$.
- **Vérification** : $(x + 1)^2 - 2 = x^2 + 2x + 1 - 2 = x^2 + 2x - 1 \checkmark$

$$f(x) = x + 1 - \frac{2}{x + 1}$$
- **Asymptote** : $\frac{2}{x + 1} \rightarrow 0$ en $\pm\infty$, donc la droite $y = x + 1$ est **asymptote oblique** aux deux extrémités.
- **Position** : $f(x) - (x + 1) = -\frac{2}{x + 1}$.
- Pour $x > -1$: c'est **négatif**, la courbe est **en dessous** de l'asymptote.
- Pour $x < -1$: c'est **positif**, la courbe est **au-dessus**.
- **Contrôles** : $f(10) = \frac{119}{11} = 10,818$, et l'asymptote donne 11 — écart $-0,182 = -\frac{2}{11} \checkmark$
- **Méthode systématique** : la division euclidienne du numérateur par le dénominateur donne **directement** l'asymptote et le reste.

Réponse. Asymptote $y = x + 1$; courbe en dessous si $x > -1$, au-dessus sinon.

Correction de l'exercice 9 - Limite avec valeur absolue

- **À droite** ($x > 2$) : $x - 2 > 0$ donc $|x - 2| = x - 2$, et le quotient vaut 1. La limite est 1.
- **À gauche** ($x < 2$) : $x - 2 < 0$ donc $|x - 2| = -(x - 2)$, et le quotient vaut -1 . La limite est -1 .
- **Conclusion** : les deux limites latérales **diffèrent**, donc f **n'a pas de limite** en 2.
- **Nature** : c'est une **discontinuité de saut** (saut d'amplitude 2).
- **Règle** : une fonction admet une limite en a **si et seulement si** les deux limites latérales existent et sont **égales**.
- **Cas voisin à ne pas confondre** : $\frac{|x - 2|}{(x - 2)^2}$ tend vers $+\infty$ **des deux côtés** — là, la limite existe (infinie).

Réponse. 1 à droite, -1 à gauche : pas de limite en 2.

Correction de l'exercice 10 - Théorème des gendarmes

- **Encadrement du numérateur** : $-1 \leq \cos x \leq 1$, donc $2x - 1 \leq \cos x + 2x \leq 2x + 1$.
- Le dénominateur $x + 1$ est **positif** pour $x > 0$, l'encadrement se conserve :

$$\frac{2x - 1}{x + 1} \leq f(x) \leq \frac{2x + 1}{x + 1}$$
- **Limites des bornes** : en factorisant par x , les deux tendent vers 2.
- **Gendarmes** : $f(x) \rightarrow 2$.
- **Contrôles** : $f(100) = \frac{\cos 100 + 200}{101} \approx \frac{200,86}{101} \approx 1,9887 \checkmark$

- **Pourquoi les gendarmes ?** $\cos x$ n'a **aucune limite** en $+\infty$ — on ne peut pas passer à la limite terme à terme. L'encadrement contourne l'obstacle.
- **Asymptote** : la droite $y = 2$ est asymptote horizontale, la courbe oscillant autour d'elle.

Réponse. La limite vaut 2.

Correction de l'exercice 11 - Limite d'une composée

Première limite. On pose $u = -\frac{1}{x}$.

- Quand $x \rightarrow +\infty$, $u \rightarrow 0$, donc par **composition** $e^u \rightarrow e^0 = 1$.

Seconde limite. Quand $x \rightarrow 0^+$, $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ donc $u = -\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$.

- Par composition, $e^u \rightarrow 0$.
- **Contrôles** : $e^{-1/100} = 0,99005 \checkmark$; $e^{-1/0,01} = e^{-100} \approx 3,7 \times 10^{-44} \checkmark$
- **Conséquence** : la fonction $x \mapsto e^{-1/x}$ se **prolonge par continuité** en 0 par la valeur 0, et admet $y = 1$ pour asymptote horizontale en $+\infty$.
- **Méthode** : pour une composée, on détermine d'abord la limite de la fonction **intérieure**, puis on l'injecte dans la fonction extérieure.

Réponse. 1 en $+\infty$ et 0 en 0^+ .

Correction de l'exercice 12 - Limite et taux de variation

Première limite. On fait apparaître la limite de référence en multipliant et divisant par 2 :

$$\frac{e^{2x} - 1}{x} = 2 \times \frac{e^{2x} - 1}{2x} \rightarrow 2 \times 1 = 2$$

- **Lecture par la dérivée** : c'est le taux de variation en 0 de $x \mapsto e^{2x}$, dont la dérivée est $2e^{2x}$, valant 2 en 0 $\checkmark$

Seconde limite. Même technique avec le facteur 3 :

$$\frac{\ln(1 + 3x)}{x} = 3 \times \frac{\ln(1 + 3x)}{3x} \rightarrow 3$$

- **Contrôles** : en $x = 0,001$, $\frac{e^{0,002} - 1}{0,001} \approx 2,002 \checkmark$ et $\frac{\ln(1,003)}{0,001} \approx 2,9955 \checkmark$
- **Règle générale** : $\frac{e^{ax} - 1}{x} \rightarrow a$ et $\frac{\ln(1 + ax)}{x} \rightarrow a$ — le coefficient de x sort tel quel.

Réponse. 2 et 3.

Correction de l'exercice 13 - Limite d'un produit indéterminé

- **Forme** $\infty \times 0$: on utilise la **quantité conjuguée** dans la parenthèse.

$$\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 = \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1}$$

- En multipliant par x , le facteur $\frac{1}{x}$ **disparaît** :

$$x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} \rightarrow \frac{1}{2} = 0,5$$

- **Contrôle** : en $x = 1000$, $1000 \left(\sqrt{1,001} - 1 \right) = 1000 \times 4,9988 \times 10^{-4} \approx 0,49988 \checkmark$

- **Autre voie** : poser $h = \frac{1}{x} \rightarrow 0$ ramène l'expression à $\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$, taux de variation de $\sqrt{\cdot}$ en 1, donc $\frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2} \checkmark$
- **Leçon** : une forme $\infty \times 0$ se transforme presque toujours en $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ par une réécriture.

Réponse. La limite vaut $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 14 - Étude complète d'une fonction

- **Domaine** : $x^2 - 1 \neq 0$, donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
- **En $\pm\infty$** : $\frac{x^2}{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} \rightarrow 1$ — asymptote **horizontale** $y = 1$.
- **En 1** : le numérateur tend vers $1 > 0$; $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ est **négatif** sur $] - 1 ; 1[$ et positif après.
- Donc $f(x) \rightarrow -\infty$ en 1^- et $+\infty$ en 1^+ — asymptote **verticale** $x = 1$.
- **En -1** : par **parité** (f est paire, $f(-x) = f(x)$), on a $f \rightarrow +\infty$ en $(-1)^-$ et $-\infty$ en $(-1)^+$ — asymptote **verticale** $x = -1$.
- **Position par rapport à $y = 1$** : $f(x) - 1 = \frac{x^2 - x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{1}{x^2 - 1}$, **positive** pour $|x| > 1$ (courbe au-dessus) et négative sur $] - 1 ; 1[$.
- **Contrôles** : $f(0) = 0 \checkmark$; $f(2) = \frac{4}{3} \approx 1,333 > 1 \checkmark$; $f(0,5) = \frac{0,25}{-0,75} \approx -0,333 < 1 \checkmark$

Réponse. $y = 1$ horizontale ; $x = \pm 1$ verticales ; courbe au-dessus de $y = 1$ si $|x| > 1$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : modèle avec asymptote

a) On factorise par t^2 au dénominateur :

$$C(t) = \frac{5t}{t^2\left(1 + \frac{4}{t^2}\right)} = \frac{5}{t} \times \frac{1}{1 + \frac{4}{t^2}} \rightarrow 0$$

- **Interprétation** : le médicament est **entièrement éliminé** à long terme ; l'axe des abscisses est asymptote horizontale.

b) **Dérivée** (quotient) :

$$C'(t) = \frac{5(t^2 + 4) - 5t \times 2t}{(t^2 + 4)^2} = \frac{5(4 - t^2)}{(t^2 + 4)^2}$$

- Le dénominateur est positif : C' a le signe de $4 - t^2$, donc **positive** sur $[0 ; 2[$ et négative après.
- **Maximum** en $t = 2$ heures, de valeur $C(2) = \frac{10}{8} = 1,25$ mg/L.
- **Contrôles** : $C(1) = \frac{5}{5} = 1 \checkmark$; $C(3) = \frac{15}{13} \approx 1,154 \checkmark$ — bien inférieurs à 1,25.
- **Lecture pharmacologique** : le pic de concentration est atteint **2 h** après la prise, puis la décroissance est lente (en $\frac{5}{t}$).

Réponse. a) limite 0 · b) maximum 1,25 mg/L à $t = 2$ h.