

Plaquette 1 - Limites en l'infini

Limites de fonctions — Terminale spé maths

Exercices

Méthode

En $+\infty$ ou en $-\infty$, on cherche le **terme qui domine** : pour un polynôme ou un quotient, on factorise par la plus haute puissance ; avec une racine, on pense à la **quantité conjuguée** ; avec l'exponentielle, aux **croissances comparées**. Une limite finie ℓ se traduit par une **asymptote horizontale** $y = \ell$.

Exercice 1 - Les limites de référence

Compléter le tableau des limites, en $+\infty$ puis en $-\infty$, des fonctions x^2 , x^3 , $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, e^x et e^{-x} . Donner aussi la limite de $\sqrt{x}$ en $+\infty$.

Exercice 2 - Un polynôme des deux côtés

Soit $f(x) = -2x^3 + 5x^2 - 1$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Exercice 3 - Quotient de même degré

Soit $f(x) = \frac{4x^2 - 3x + 1}{2x^2 + 5}$. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, et en déduire une asymptote.

Exercice 4 - Quotients de degrés différents

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de :

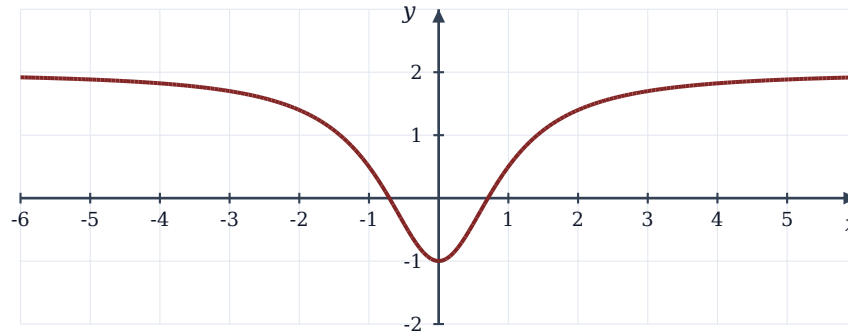
a) $g(x) = \frac{3x + 1}{x^2 + 1}$

b) $h(x) = \frac{x^3 - 2}{x + 1}$

Exercice 5 - Lire puis démontrer une asymptote

On a tracé la courbe de $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

- Conjecturer graphiquement les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- Montrer que $f(x) = 2 - \frac{3}{x^2 + 1}$, puis démontrer la conjecture.
- Préciser la position de la courbe par rapport à son asymptote.



Courbe de f

Exercice 6 - Une racine en l'infini

Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + 3} - x$, définie sur $\mathbb{R}$.

- Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Exercice 7 - Avec l'exponentielle

Soit $f(x) = 3 - 2e^{-x}$.

- Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- Interpréter graphiquement le résultat en $+\infty$.

Exercice 8 - Limites de fonctions composées

Déterminer les limites en $+\infty$ de :

- $f(x) = e^{1/x}$
- $g(x) = \sqrt{4 + \frac{1}{x}}$
- $h(x) = e^{-x^2}$

Exercice 9 - Croissances comparées

Déterminer les limites en $+\infty$ de :

- $x e^{-x}$
- $\frac{e^x}{x^2}$
- $(x^2 + 1)e^{-x}$

Exercice 10 - Conclure par comparaison

Déterminer :

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sin x)$
 b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 + \cos x)$

Exercice 11 - Les gendarmes en l'infini

Déterminer :

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$
 b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \cos x}{x}$

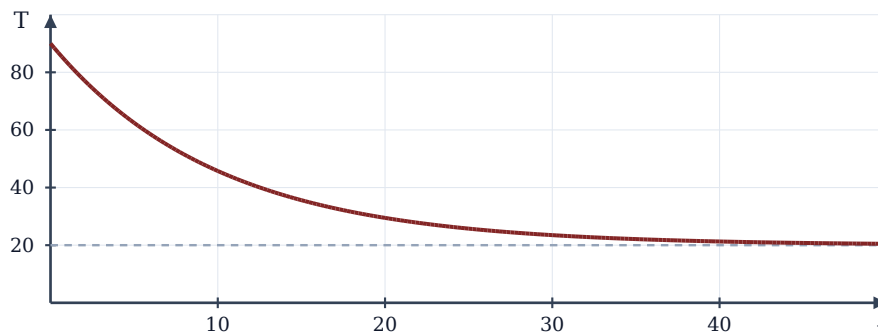
Exercice 12 - Position par rapport à l'asymptoteSoit $f(x) = \frac{3x-1}{x+2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

- a) Déterminer les limites de f en $\pm\infty$.
 b) Calculer $f(x) - 3$ et étudier la position de la courbe par rapport à son asymptote horizontale.

Exercice 13 - Refroidissement d'une tasse

La température (en °C) d'un café posé dans une pièce est donnée, t minutes après avoir été servi, par $T(t) = 20 + 70e^{-0,1t}$.

- a) Quelle est la température initiale ?
 b) Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t)$ et l'interpréter.
 c) La température descend-elle un jour sous 20 °C ?

Température du café (courbe) et droite $T = 20$ (pointillé)**Exercice 14 - Choisir un paramètre**Soit a un réel et $f(x) = \frac{ax^2 + 1}{2x^2 + x}$ pour $x > 0$.

- a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ en fonction de a .
 b) Pour quelle valeur de a la courbe admet-elle la droite $y = 3$ comme asymptote ?
 c) Que se passe-t-il si $a = 0$?

Exercice 15 - Aussi proche qu'on veut

Soit $f(x) = 2 + \frac{3}{x}$ pour $x > 0$.

- a) Déterminer la limite ℓ de f en $+\infty$.
- b) À partir de quelle valeur de x a-t-on $f(x) - \ell < 0,01$? et $< 10^{-6}$?