

Plaquette 2 - Limites en un point et latérales

Limites de fonctions — Terminale spé maths

Exercices

Méthode

En un point a , on commence par **remplacer** : si l'expression est définie en a , la limite est la valeur. Sinon, un dénominateur qui tend vers 0 impose d'étudier son **signe** de chaque côté (limites **à gauche** et **à droite**), et une forme $\frac{0}{0}$ se lève en **factorisant** ou avec la **quantité conjuguée**.

Exercice 1 - Il suffit de remplacer

Déterminer :

a) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x - 1)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x+1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} + 1}{x - 1}$

Exercice 2 - À gauche et à droite de zéro

a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$. La fonction inverse a-t-elle une limite en 0 ?

b) Même question pour $x \mapsto \frac{1}{x^2}$.

Exercice 3 - Une asymptote verticale

Soit $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Déterminer les limites de f à gauche et à droite de 1. Interpréter graphiquement.

Exercice 4 - Un trou ou une asymptote ?

Soit $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$.

a) Simplifier $f(x)$.

b) Étudier la limite de f en -2 , puis en 2 (à gauche et à droite).

Exercice 5 - Lever une forme 0/0 en factorisant

Déterminer :

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$

Exercice 6 - Lever une forme 0/0 avec le conjugué

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$.

Exercice 7 - Reconnaître un nombre dérivé

Déterminer, en reconnaissant un taux d'accroissement :

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$

Exercice 8 - Deux valeurs interdites

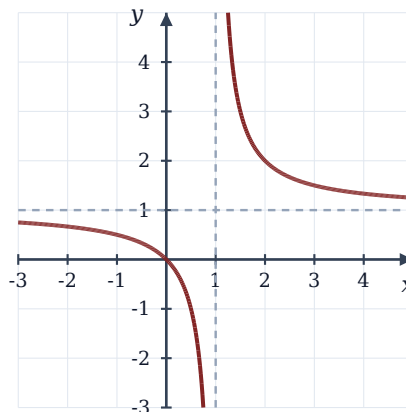
Soit $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

Déterminer les limites de f à gauche et à droite de -1 et de 1 .

Exercice 9 - Lire des limites sur une courbe

La courbe ci-dessous représente une fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; les droites en pointillé sont ses asymptotes.

- a) Lire les limites de f en 1^- , en 1^+ , en $-\infty$ et en $+\infty$.
- b) On admet que $f(x) = 1 + \frac{1}{x-1}$. Démontrer ces limites.



Courbe de f et ses deux asymptotes

Exercice 10 - Recoller deux morceaux

Soit a un réel et f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ si $x < 1$ et $f(x) = 2x + a$ si $x \geq 1$.

- a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.
- b) Pour quelle valeur de a la fonction f a-t-elle une limite en 1 ?

Exercice 11 - Valeur absolue en zéro

Soit $f(x) = \frac{|x|}{x}$ pour $x \neq 0$, et $g(x) = \frac{x^2 + |x|}{x}$.

- a) Simplifier $f(x)$ selon le signe de x , et étudier sa limite en 0.
- b) Même question pour g .

Exercice 12 - Exponentielle d'un inverse

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x}$.

Exercice 13 - Coût moyen de production

Une entreprise fabrique x centaines d'objets ($x > 0$) pour un coût total $C(x) = x^2 + 100$ (en milliers d'euros). Le coût moyen est $M(x) = \frac{C(x)}{x}$.

- a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} M(x)$ et interpréter.
- b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} M(x)$.

Exercice 14 - Rendre une limite finie

Soit a un réel et $f(x) = \frac{x^2 + ax + 6}{x - 2}$ pour $x \neq 2$.

- a) Pour $a = 0$, déterminer les limites de f à gauche et à droite de 2.
- b) Déterminer a pour que f ait une limite **finie** en 2, et calculer cette limite.

Exercice 15 - Lentille et image à l'infini

Pour une lentille de distance focale 3 cm, un objet placé à la distance $x > 3$ (en cm) donne une image à la distance $p(x) = \frac{3x}{x - 3}$.

- a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 3^+} p(x)$ et interpréter.
- b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x)$ et interpréter.