

Plaquette 3 - Opérations et formes indéterminées

Limites de fonctions — Terminale spé maths

Exercices

Méthode

On applique d'abord les **règles d'opérations** (somme, produit, quotient, composition). Face à une **forme indéterminée**, on ne conclut jamais « au hasard » : on **transforme l'écriture** — factoriser par le terme dominant, simplifier, conjuguer, ou invoquer les croissances comparées — jusqu'à obtenir une forme où les règles s'appliquent.

Exercice 1 - Reconnaître les formes indéterminées

Pour chaque situation, donner la limite de l'expression ou indiquer qu'il s'agit d'une forme indéterminée.

- a) $u \rightarrow +\infty$ et $v \rightarrow -3$: limite de $u \times v$?
- b) $u \rightarrow +\infty$ et $v \rightarrow -\infty$: limite de $u + v$?
- c) $u \rightarrow 0$ et $v \rightarrow +\infty$: limite de $u \times v$?
- d) $u \rightarrow 5$ et $v \rightarrow 0^-$: limite de $\frac{u}{v}$?
- e) $u \rightarrow -\infty$ et $v \rightarrow +\infty$: limite de $\frac{u}{v}$?
- f) $u \rightarrow 2$ et $v \rightarrow -\infty$: limite de $\frac{u}{v}$?

Exercice 2 - Une somme à trois endroits

Soit $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$. Déterminer les limites de f en $+\infty$, en 0^+ et en 0^- .

Exercice 3 - Un produit 0 fois infini

Déterminer :

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} (x^2 + 1)$
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \times \frac{1}{x}$
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} (3x^2 - x)$

Exercice 4 - Infini moins infini, ou pas

Soit $f(x) = x^3 - 100x^2$.

- a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- c) Calculer $f(50)$ et $f(200)$: que penser ?

Exercice 5 - Un quotient avec racine

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{x}}{x + 1}$.

Exercice 6 - Factoriser un cube

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$.

On pourra vérifier que $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$.

Exercice 7 - Deux conjugués en l'infini

Déterminer :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - 2x})$

Exercice 8 - Exponentielles en compétition

Soit $f(x) = \frac{e^x - x}{e^x + x}$.

a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Exercice 9 - Une différence d'exponentielles

Soit $f(x) = e^{2x} - e^x$. Déterminer ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 10 - Composer avec une racine

Déterminer :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 1}{x^2 + 3}}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1-x}{x+2}}$

Exercice 11 - Démontrer une croissance comparée

On admet que, pour tout $x \geq 0$, $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

a) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x}$.

Exercice 12 - Corriger un raisonnement

Un élève écrit : « $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x) = +\infty - \infty = 0$ ».

a) Expliquer pourquoi ce raisonnement est faux.

b) Déterminer la vraie limite.

c) Trouver deux fonctions u et v tendant vers $+\infty$ telles que $u - v$ tende vers 5.

Exercice 13 - Polynôme et racine

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 3\sqrt{x})$, puis résoudre $x - 3\sqrt{x} > 0$ sur $]0; +\infty[$.

Exercice 14 - Discuter selon un paramètre

Soit m un réel et $g(x) = mx^3 - x^2$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ selon les valeurs de m .

Exercice 15 - Étude complète des limites

Soit $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$.

- a) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- b) Déterminer les limites de f en $\pm\infty$, en 1 (à gauche et à droite) et en 2.
- c) En déduire les asymptotes éventuelles.