

Plaquette 3 - Équations différentielles $y' = ay$

Primitives et équations différentielles — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Théorème. Soit a un réel. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions

$$y(x) = C e^{ax}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Condition initiale : pour tout couple $(x_0; y_0)$, il existe une **unique** solution telle que $y(x_0) = y_0$. En particulier, si $y(0) = y_0$, alors $y(x) = y_0 e^{ax}$.

Forme à reconnaître : $y' + 2y = 0$ s'écrit $y' = -2y$; $3y' = y$ s'écrit $y' = \frac{1}{3}y$.

Comportement (pour $C > 0$) :

- $a > 0$: croissance exponentielle, $y \rightarrow +\infty$;
- $a < 0$: décroissance exponentielle, $y \rightarrow 0$.

Temps de doublement ($a > 0$) : $\frac{\ln 2}{a}$; **demi-vie** ($a = -\lambda < 0$) : $\frac{\ln 2}{\lambda}$.

Méthode d'Euler (pas h) : $y(x+h) \approx y(x) + h y'(x) = (1 + ah) y(x)$.

Correction de l'exercice 1 - Vérifier une solution

On calcule y' et on compare à $2y$:

$$f \text{ solution} \Leftrightarrow f'(x) = 2f(x) \text{ pour tout } x$$

a) $f'(x) = 3 \times 2e^{2x} = 6e^{2x}$ et $2f(x) = 6e^{2x}$: égalité, f est solution ✓

b) $g'(x) = 2e^{2x}$ mais $2g(x) = 2e^{2x} + 2$: les deux diffèrent de 2, g **n'est pas** solution.

c) La fonction nulle vérifie $0' = 0 = 2 \times 0$: elle est solution (cas $C = 0$ de Ce^{2x}).

— **Leçon** : ajouter une constante à une solution de $y' = ay$ ne donne **pas** une solution (contrairement aux primitives).

Réponse. a) Oui · b) Non · c) Oui.

Correction de l'exercice 2 - Lire le coefficient a

On met chaque équation sous la forme $y' = ay$, puis on applique

$$y' = ay \Leftrightarrow y(x) = C e^{ax}$$

a) $a = 5$: $y(x) = C e^{5x}$.

b) $y' = -2y$, $a = -2$: $y(x) = C e^{-2x}$.

c) $y' = \frac{1}{3}y$, $a = \frac{1}{3}$: $y(x) = C e^{x/3}$.

d) $y' = 0,4y$: $y(x) = C e^{0,4x}$.

(C désigne une constante réelle quelconque.)

— **Piège en b)** : le terme $+2y$ passe de l'autre côté avec un signe **moins** : $a = -2$, pas 2.

Réponse. a) $C e^{5x}$ · b) $C e^{-2x}$ · c) $C e^{x/3}$ · d) $C e^{0,4x}$.

Correction de l'exercice 3 - Une condition initiale en zéro

Les solutions sont $f(x) = Ce^{0,5x}$. La condition initiale donne

$$f(0) = Ce^0 = C = 4$$

donc $f(x) = 4e^{0,5x}$.

— $f(2) = 4e^1 = 4e \approx 10,87$;

— $f(4) = 4e^2 \approx 29,56$.

— **Observation** : tous les 2 unités, la valeur est multipliée par $e \approx 2,718$: c'est la croissance exponentielle, à **taux constant**.

— **Réflexe** : avec une condition en 0, la constante C est directement la **valeur initiale**.

Réponse. $f(x) = 4e^{0,5x}$; $f(2) = 4e \approx 10,87$; $f(4) = 4e^2 \approx 29,56$.

Correction de l'exercice 4 - Une condition en un autre point

Les solutions sont $g(x) = Ce^{-x}$. La condition en 1 donne

$$g(1) = Ce^{-1} = 2 \Leftrightarrow C = 2e$$

— Donc $g(x) = 2e \times e^{-x} = 2e^{1-x}$.

— $g(0) = 2e \approx 5,44$.

— **Vérification** : $g(1) = 2e^0 = 2 \checkmark$ et $g'(x) = -2e^{1-x} = -g(x) \checkmark$

— **Piège** : écrire $C = 2$ comme si la condition portait sur $x = 0$.

Réponse. $g(x) = 2e^{1-x}$; $g(0) = 2e$.

Correction de l'exercice 5 - Courbes intégrales

a) Avec $a = -0,5$:

$$y(x) = Ce^{-0,5x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

b) **Par** $A(0; 3)$: $C = 3$, soit $y(x) = 3e^{-0,5x}$.

Par $B(2; -1)$: $Ce^{-1} = -1 \Leftrightarrow C = -e$, soit $y(x) = -e \times e^{-0,5x} = -e^{1-0,5x}$.

c) **Non** : par chaque point passe une **unique** solution. Si deux courbes se coupaient en un point, elles correspondraient à la même condition initiale, donc à la même solution.

— **Lecture** : toutes les courbes tendent vers l'axe des abscisses ($a < 0$), par au-dessus si $C > 0$, par en dessous si $C < 0$.

Réponse. a) $Ce^{-0,5x}$. b) $3e^{-0,5x}$ et $-e^{1-0,5x}$. c) non.

Correction de l'exercice 6 - Retrouver a à partir de deux valeurs

a) $f(x) = Ce^{ax}$ avec $C = f(0) = 5$. Puis

$$f(3) = 5e^{3a} = 40 \Leftrightarrow e^{3a} = 8 \Leftrightarrow 3a = \ln 8 = 3 \ln 2 \Leftrightarrow a = \ln 2$$

— Donc $f(x) = 5e^{x \ln 2} = 5 \times 2^x$.

b) Le temps de doublement T vérifie $e^{aT} = 2$, soit $T = \frac{\ln 2}{a} = 1$.

— **Cohérence** : en 3 unités de temps, f double trois fois : $5 \rightarrow 10 \rightarrow 20 \rightarrow 40 \checkmark$

— **À retenir** : e^{ax} avec $a = \ln q$ n'est autre que q^x .

Réponse. a) $a = \ln 2$. b) doublement en 1 unité de temps.

Correction de l'exercice 7 - Iode radioactif

a) $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$. La demi-vie vérifie $N(8) = \frac{N_0}{2}$:

$$e^{-8\lambda} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -8\lambda = -\ln 2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{8} \approx 0,0866 \text{ par jour}$$

b) $\frac{N(30)}{N_0} = e^{-30\lambda} = e^{-\frac{30 \ln 2}{8}} = 2^{-30/8} = 2^{-3,75} \approx 0,074$.

— Il reste environ 7,4 % de l'iode initial.

— **Contrôle** : 30 jours, c'est un peu moins de 4 demi-vies ; $\frac{1}{2^4} = 6,25 \%$, et $\frac{1}{2^3} = 12,5 \%$ ✓

— **Application** : c'est pour cela qu'après un accident nucléaire, l'iode 131 devient négligeable en quelques mois.

Réponse. a) $\lambda = \frac{\ln 2}{8}$ · b) environ 7,4 %.

Correction de l'exercice 8 - Bactéries qui doublent

a) $N(t) = 100 e^{kt}$ et $N(20) = 200$:

$$e^{20k} = 2 \Leftrightarrow k = \frac{\ln 2}{20} \approx 0,0347 \text{ par minute}$$

b) 2 heures = 120 min, soit 6 doublements :

— $N(120) = 100 e^{120k} = 100 e^{6 \ln 2} = 100 \times 2^6 = 6400$ bactéries.

— **Méthode rapide** : compter les temps de doublement, puis multiplier par 2 autant de fois.

— **Interprétation de k** : chaque minute, la population augmente d'environ 3,5 % (en réalité $e^k - 1 \approx 3,53 \%$).

Réponse. a) $k = \frac{\ln 2}{20}$ · b) 6400 bactéries.

Correction de l'exercice 9 - Démontrer le théorème

a) Dérivée d'un produit :

$$g'(x) = f(x) e^{-ax} + f(x) \times (-a e^{-ax}) = (f(x) - af(x)) e^{-ax}$$

— Comme $f' = af$, la parenthèse est nulle : $g'(x) = 0$ pour tout x .

b) Une fonction de dérivée nulle sur un **intervalle** est constante : $g(x) = C$.

— Donc $f(x) e^{-ax} = C$, soit $f(x) = C e^{ax}$.

— **Réciproque** : $(C e^{ax})' = a C e^{ax}$, ces fonctions sont bien solutions.

— **Conclusion** : on a trouvé **toutes** les solutions, pas seulement quelques-unes.

Réponse. $g' = (f - af) e^{-ax} = 0$, donc g constante et $f = C e^{ax}$.

Correction de l'exercice 10 - La méthode d'Euler

a) On remplace la courbe par sa tangente sur un petit pas :

$$y(x+h) \approx y(x) + h y'(x) = y(x) + 0,1 \times (-2y(x)) = 0,8 y(x)$$

b) En partant de $y(0) = 1$, on multiplie par 0,8 à chaque pas :

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
Euler	1	0,8	0,64	0,512	0,41	0,328

- Valeur exacte : $y(0,5) = e^{-1} \approx 0,368$.
- L'erreur est d'environ 0,04 ; les points d'Euler sont **sous** la courbe, car la courbe est convexe et la tangente passe en dessous.
- **Amélioration** : un pas plus petit réduit l'erreur (avec $h = 0,01$, on obtient $0,98^{50} \approx 0,364$).

Réponse. Euler donne $0,8^5 \approx 0,328$ contre $e^{-1} \approx 0,368$.

Correction de l'exercice 11 - Signe et sens de variation des solutions

- a) $f(x) = C e^{ax}$ avec $C = f(0) \neq 0$. Comme $e^{ax} > 0$:
- $f(x)$ a le signe de C pour tout x

Une solution non nulle ne s'annule **jamais**.

- b) $f(x) = aC e^{ax}$, du signe de aC :

- si $C > 0$: $aC < 0$, f est **décroissante** (et positive) ;
- si $C < 0$: $aC > 0$, f est **croissante** (et négative).

Dans les deux cas, $e^{ax} \rightarrow 0$ en $+\infty$ (car $a < 0$), donc $f(x) \rightarrow 0$: la solution se rapproche de l'axe des abscisses, d'un côté ou de l'autre.

- **Interprétation** : 0 est un état d'**équilibre stable** — toute solution y revient.

Réponse. Signe de C constant ; décroissante si $C > 0$, croissante si $C < 0$; limite 0.

Correction de l'exercice 12 - Changement de fonction inconnue

- a) Dérivée d'un carré, $(u^2)' = 2u'u$:

$$z' = 2y'y = 2 \times 3y \times y = 6y^2 = 6z$$

z est donc solution de $z' = 6z$, et $z(x) = Ke^{6x}$.

- b) $y(x) = Ce^{3x}$, donc $z(x) = C^2 e^{6x}$: c'est bien de la forme Ke^{6x} , avec $K = C^2 \geq 0$ ✓

- **Remarque** : toutes les solutions de $z' = 6z$ ne sont pas des carrés de solutions de $y' = 3y$ (celles avec $K < 0$) ; l'implication ne va que dans un sens.
- **Intérêt** : si une quantité croît exponentiellement, son carré (une aire, une énergie) croît deux fois plus vite.

Réponse. $z' = 2yy' = 6z$; cohérent avec $z = C^2 e^{6x}$.

Correction de l'exercice 13 - La pression en altitude

- a) Solution de $y' = ay$ avec $a = -0,12$ et valeur initiale 1 013 :

$$P(h) = 1\,013 e^{-0,12h}$$

- b) $P(8,849) = 1\,013 e^{-1,0619} \approx 1\,013 \times 0,346 \approx 350$ hPa, environ **un tiers** de la pression au niveau de la mer.

- c) $1\,013 e^{-0,12h} = 500 \Leftrightarrow e^{-0,12h} = \frac{500}{1\,013}$, donc

- $h = \frac{1}{0,12} \ln \frac{1\,013}{500} \approx \frac{0,706}{0,12} \approx 5,9$ km.

— **Interprétation** : la pression est divisée par deux tous les $\frac{\ln 2}{0,12} \approx 5,8$ km.

Réponse. a) $1\,013e^{-0,12h}$ · b) ≈ 350 hPa · c) $\approx 5,9$ km.

Correction de l'exercice 14 - Absorption de la lumière

a) Solution de $y' = ay$ avec $a = -0,4$:

$$I(x) = I_0 e^{-0,4x}$$

(loi de Beer-Lambert).

b) On résout $I(x) = \frac{I_0}{10}$:

$$e^{-0,4x} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow -0,4x = -\ln 10 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 10}{0,4} \approx 5,76 \text{ cm.}$$

— **Remarque** : chaque tranche de 5,76 cm divise encore l'intensité par 10 ; après 11,5 cm, il ne reste que 1 % de la lumière.

— **Interprétation de l'équation** : chaque millimètre absorbe la **même proportion** de la lumière qui lui parvient.

Réponse. a) $I(x) = I_0 e^{-0,4x}$ · b) $x = \frac{\ln 10}{0,4} \approx 5,76$ cm.

Correction de l'exercice 15 - Deux solutions ne se croisent pas

a) $f(x) = e^{2x}$ et $g(x) = 3e^{2x}$, donc

$$g(x) - f(x) = 2e^{2x} > 0$$

b) L'écart est **strictement positif** pour tout x : la courbe de g est toujours au-dessus de celle de f , elles ne se coupent jamais.

— En $+\infty$: $2e^{2x} \rightarrow +\infty$, les courbes s'éloignent.

— En $-\infty$: $2e^{2x} \rightarrow 0$, les courbes se rapprochent (toutes deux de l'axe des abscisses) sans se toucher.

— **Remarque** : $g - f$ est elle-même solution de $y' = 2y$ (l'équation est **linéaire**) ; elle ne s'annule pas car elle n'est pas nulle en 0.

— **Rapport** : $\frac{g(x)}{f(x)} = 3$ pour tout x — les solutions sont proportionnelles.

Réponse. $g - f = 2e^{2x} > 0$: pas d'intersection ; écart infini en $+\infty$, nul en $-\infty$.