

Plaquette 4 - Équations différentielles $y' = ay + b$

Primitives et équations différentielles — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Théorème. Pour $a \neq 0$, les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y' = ay + b$ sont les fonctions

$$y(x) = C e^{ax} - \frac{b}{a}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Structure : solution générale = solution particulière (ici la constante $-\frac{b}{a}$) + solution générale de l'équation homogène $y' = ay$.

Solution constante : $y = k$ vérifie $0 = ak + b$, soit $k = -\frac{b}{a}$; c'est la valeur d'équilibre.

Comportement :

- $a < 0$: $e^{ax} \rightarrow 0$, toute solution tend vers $-\frac{b}{a}$ (**équilibre stable**) ;
- $a > 0$: les solutions s'éloignent de l'équilibre (sauf la solution constante).

Second membre non constant $y' = ay + f$: si y_p est une solution particulière, les solutions sont $y_p + C e^{ax}$.

Temps caractéristique ($a < 0$) : $\tau = -\frac{1}{a}$. Au bout de τ , l'écart à l'équilibre est divisé par e ; au bout de 5τ , il reste moins de 1 %.

Correction de l'exercice 1 - Chercher l'équilibre

Une fonction constante $y = k$ a une dérivée nulle ; on résout donc $0 = ak + b$:

$$k = -\frac{b}{a}$$

a) $0 = 3k - 6 \Leftrightarrow k = 2$.

b) $0 = -0,5k + 10 \Leftrightarrow k = 20$.

c) On écrit d'abord l'équation sous la forme $y' = ay + b$: $y' = -4y + 2$. Puis $0 = -4k + 2 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$.

— **Vérification de a)** : $y = 2$ donne $y' = 0$ et $3 \times 2 - 6 = 0$ ✓

— **Interprétation** : la solution constante est l'**état d'équilibre** du système décrit par l'équation.

Réponse. a) 2 · b) 20 · c) $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 2 - Solution générale

Étape 1 : solution constante. $0 = 2k + 4 \Leftrightarrow k = -2$.

Étape 2 : homogène. $y' = 2y$ a pour solutions $C e^{2x}$.

Étape 3 : somme.

$$y(x) = C e^{2x} - 2, \quad C \in \mathbb{R}$$

Condition initiale : $f(0) = C - 2 = 1 \Leftrightarrow C = 3$, donc $f(x) = 3e^{2x} - 2$.

— **Vérification** : $f(x) = 6e^{2x}$ et $2f(x) + 4 = 6e^{2x} - 4 + 4 = 6e^{2x}$ ✓

— **Comportement** : $a = 2 > 0$, la solution s'éloigne de l'équilibre -2 et tend vers $+\infty$.

Réponse. $y(x) = Ce^{2x} - 2$; $f(x) = 3e^{2x} - 2$.

Correction de l'exercice 3 - Convergence vers l'équilibre

— **Équilibre** : $0 = -3k + 9 \Leftrightarrow k = 3$.

— **Solutions** :

$$y(x) = Ce^{-3x} + 3$$

— **Condition initiale** : $f(0) = C + 3 = 1 \Leftrightarrow C = -2$, donc $f(x) = 3 - 2e^{-3x}$.

Limite : $e^{-3x} \rightarrow 0$ en $+\infty$, donc $f(x) \rightarrow 3$: la solution **rejoint l'équilibre**.

— **Sens de variation** : $f(x) = 6e^{-3x} > 0$, f croît de 1 vers 3 sans jamais l'atteindre.

— **Rapidité** : $\tau = \frac{1}{3}$; à $x = 1$ (3τ), l'écart à l'équilibre n'est plus que $2e^{-3} \approx 0,1$.

Réponse. $f(x) = 3 - 2e^{-3x}$, qui tend vers 3.

Correction de l'exercice 4 - Mettre sous la bonne forme

On isole y' pour se ramener à la forme du cours :

$$2y' + y = 6 \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{2}y + 3$$

— $a = -\frac{1}{2}$, $b = 3$; équilibre : $k = -\frac{b}{a} = 6$.

— Solutions : $y(x) = Ce^{-x/2} + 6$.

— Condition $y(0) = 0$: $C + 6 = 0 \Leftrightarrow C = -6$, d'où $y(x) = 6(1 - e^{-x/2})$.

— **Vérification** : $y'(x) = 3e^{-x/2}$ et $2y' + y = 6e^{-x/2} + 6 - 6e^{-x/2} = 6$ ✓

— **Piège** : lire $a = -1$ ou $b = 6$ sans avoir divisé par 2.

Réponse. $y(x) = Ce^{-x/2} + 6$; $y(x) = 6(1 - e^{-x/2})$.

Correction de l'exercice 5 - Équilibre stable ou instable

a) Équilibre : $0 = -2k + 4 \Leftrightarrow k = 2$. Solutions :

$$y(x) = 2 + Ce^{-2x}$$

b) $a = -2 < 0$: $e^{-2x} \rightarrow 0$, donc **toutes** les solutions tendent vers 2, par au-dessus si $C > 0$, par en dessous si $C < 0$. L'équilibre est **stable** (attractif).

c) Pour $y' = 2y - 4$, l'équilibre est encore 2, mais les solutions s'écrivent $2 + Ce^{2x}$: dès que $C \neq 0$, elles **s'éloignent** de 2 vers $\pm\infty$. L'équilibre est **instable**.

— **À retenir** : c'est le **signe de a** qui décide de la stabilité, pas la valeur de l'équilibre.

Réponse. a) $2 + Ce^{-2x}$ · b) toutes tendent vers 2 · c) équilibre instable.

Correction de l'exercice 6 - Chute avec frottements

a) On écrit $v' = -0,2v + 9,8$: $a = -0,2$, équilibre $-\frac{9,8}{-0,2} = 49$. Donc

$$v(t) = 49 + Ce^{-0,2t}$$

— $v(0) = 49 + C = 0 \Leftrightarrow C = -49$: $v(t) = 49(1 - e^{-0,2t})$.

— **Vitesse limite** : 49 m/s (environ 176 km/h), atteinte quand le frottement compense le poids.

b) $49(1 - e^{-0,2t}) = 45 \Rightarrow e^{-0,2t} = \frac{4}{49}$.

— $t = \frac{1}{0,2} \ln \frac{49}{4} = 5 \ln 12,25 \approx 12,5$ s.

— **Lecture** : sur la figure, la courbe atteint le niveau 45 vers $t \approx 12,5$ ✓

Réponse. a) $v(t) = 49(1 - e^{-0,2t})$, limite 49 m/s · b) $\approx 12,5$ s.

Correction de l'exercice 7 - Chauffer une pièce

a) En développant : $T' = -0,1T + 1 + 2 = -0,1T + 3$.

— Équilibre : $0 = -0,1k + 3 \Rightarrow k = 30$ °C.

— Interprétation : les pertes vers l'extérieur ($-0,1(T - 10)$) compensent exactement le chauffage (+2) à 30 °C.

b) Solutions : $T(t) = 30 + C e^{-0,1t}$, et $T(0) = 10$ donne $C = -20$:

$$T(t) = 30 - 20 e^{-0,1t}$$

— $T(t) = 25 \Rightarrow 20 e^{-0,1t} = 5 \Rightarrow e^{-0,1t} = \frac{1}{4} \Rightarrow t = 10 \ln 4 \approx 13,9$ min.

— **Contrôle** : $T(13,9) \approx 30 - 20 \times 0,249 \approx 25,0$ °C ✓

Réponse. a) $T' = -0,1T + 3$, équilibre 30 °C · b) $T(t) = 30 - 20e^{-0,1t}$; 25 °C au bout de $10 \ln 4 \approx 14$ min.

Correction de l'exercice 8 - Épargne en continu

a) Solution constante : $0 = 0,03k + 1\,200 \Rightarrow k = -40\,000$. Donc

$$S(t) = C e^{0,03t} - 40\,000$$

— $S(0) = C - 40\,000 = 0 \Rightarrow C = 40\,000$: $S(t) = 40\,000(e^{0,03t} - 1)$.

b) $S(10) = 40\,000(e^{0,3} - 1) \approx 40\,000 \times 0,3499 \approx 13\,994$ €.

— Sommes versées : $10 \times 1\,200 = 12\,000$ € ; les intérêts rapportent donc environ 1 994 €.

— **Remarque** : ici $a > 0$; l'« équilibre » $-40\,000$ n'a pas de sens concret, mais il sert au calcul. Le capital croît exponentiellement.

Réponse. a) $S(t) = 40\,000(e^{0,03t} - 1)$ · b) $\approx 13\,994$ €, dont $\approx 1\,994$ € d'intérêts.

Correction de l'exercice 9 - Un second membre non constant

a) $y_p'(x) = e^{-x} - x e^{-x}$ (dérivée d'un produit), donc

$$y_p'(x) + y_p(x) = e^{-x} - x e^{-x} + x e^{-x} = e^{-x}$$

y_p est bien solution ✓

b) **Structure des solutions** : y est solution de (E) si et seulement si $y - y_p$ est solution de l'équation homogène $y' + y = 0$, c'est-à-dire $y' = -y$. Donc

— $y(x) = x e^{-x} + C e^{-x} = (x + C) e^{-x}$.

— $y(0) = C = 2$: la solution cherchée est $y(x) = (x + 2) e^{-x}$.

— **Pourquoi pas de constante ici** : le second membre n'est pas constant, il faut une solution particulière adaptée — elle est fournie par l'énoncé.

Réponse. $y(x) = (x + C)e^{-x}$; $y(x) = (x + 2)e^{-x}$.

Correction de l'exercice 10 - Une perfusion

a) Équilibre : $0 = -0,5k + 2 \Rightarrow k = 4$. Solutions $Q(t) = 4 + Ce^{-0,5t}$, et $Q(0) = 0$ donne $C = -4$:

$$Q(t) = 4(1 - e^{-0,5t}) \rightarrow 4 \text{ mg}$$

La quantité se stabilise à 4 mg : ce qui entre (2 mg/h) compense ce qui est éliminé (50 % de 4 mg, soit 2 mg/h).

b) $Q(t) = 0,9 \times 4 \Rightarrow 1 - e^{-0,5t} = 0,9 \Rightarrow e^{-0,5t} = 0,1$.

$$- t = \frac{\ln 10}{0,5} = 2 \ln 10 \approx 4,6 \text{ h.}$$

— **Enjeu médical** : le plateau thérapeutique n'est atteint qu'au bout de quelques heures ; c'est pourquoi on commence parfois par une « dose de charge ».

Réponse. a) $Q(t) = 4(1 - e^{-0,5t}) \rightarrow 4 \text{ mg}$ · b) $2 \ln 10 \approx 4,6 \text{ h}$.

Correction de l'exercice 11 - Retrouver l'équation

Forme des solutions : $f(x) = k + Ce^{ax}$, où $k = -\frac{b}{a}$ est l'équilibre.

— f a une limite finie en $+\infty$ et n'est pas constante : il faut $a < 0$, et la limite est l'équilibre, donc $k = 5$.

$$- f(0) = 5 + C = 1 \Rightarrow C = -4 : f(x) = 5 - 4e^{ax}.$$

$$- f(1) = 5 - 4e^a = 3 \Rightarrow e^a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -\ln 2.$$

Enfin $b = -ak = 5 \ln 2$.

$$f(x) = 5 - 4e^{-x \ln 2} = 5 - 4 \times 2^{-x} \quad y' = -\ln 2 y + 5 \ln 2$$

$$- \text{Contrôle} : f(1) = 5 - 4 \times \frac{1}{2} = 3 \checkmark ; a < 0 \checkmark$$

Réponse. $a = -\ln 2$, $b = 5 \ln 2$, $f(x) = 5 - 4 \times 2^{-x}$.

Correction de l'exercice 12 - Population avec immigration

a) Solution constante : $0 = 0,02k + 100 \Rightarrow k = -5\,000$. Donc

$$P(t) = Ce^{0,02t} - 5\,000$$

$$- P(0) = C - 5\,000 = 1\,000 \Rightarrow C = 6\,000 : P(t) = 6\,000e^{0,02t} - 5\,000.$$

$$b) P(10) = 6\,000e^{0,2} - 5\,000 \approx 6\,000 \times 1,2214 - 5\,000 \approx 2\,328 \text{ habitants.}$$

— **Comparaison** : sans immigration, on aurait $1\,000e^{0,2} \approx 1\,221$ habitants ; l'apport régulier compte ici davantage que la croissance naturelle.

$$- \text{Vérification} : P'(t) = 120e^{0,02t} \text{ et } 0,02P + 100 = 120e^{0,02t} - 100 + 100 \checkmark$$

Réponse. a) $P(t) = 6\,000e^{0,02t} - 5\,000$ · b) $\approx 2\,328$ habitants.

Correction de l'exercice 13 - Établissement du courant

$$a) \text{ En divisant par } L : i' = -\frac{R}{L}i + \frac{E}{L} = -20i + 10.$$

$$- \text{Équilibre} : 0 = -20k + 10 \Rightarrow k = 0,5.$$

$$- \text{Solutions} : i(t) = 0,5 + Ce^{-20t}, \text{ et } i(0) = 0 \text{ donne } C = -0,5 :$$

$$i(t) = 0,5(1 - e^{-20t})$$

b) **Intensité limite** : $0,5 \text{ A} = \frac{E}{R}$ (loi d'Ohm, la bobine n'agit plus en régime permanent).

— $\tau = \frac{0,5}{10} = 0,05 \text{ s}$; on retrouve $a = -\frac{1}{\tau} = -20$.

— $i(3\tau) = 0,5(1 - e^{-3}) \approx 0,475 \text{ A}$, soit 95 % de la valeur finale.

Réponse. $i(t) = 0,5(1 - e^{-20t})$; limite $0,5 \text{ A}$; $\tau = 0,05 \text{ s}$; $i(3\tau) \approx 0,475 \text{ A}$.

Correction de l'exercice 14 - Une erreur de signe

a) Si $y(x) = e^{2x} + 6$: $y'(x) = 2e^{2x}$ mais $2y(x) + 6 = 2e^{2x} + 12 + 6 = 2e^{2x} + 18$. Les deux diffèrent : **ce n'est pas** une solution.

b) L'élève a ajouté b au lieu de la **solution constante**. Celle-ci vérifie $0 = 2k + 6$, soit $k = -3$:

$$y(x) = C e^{2x} - \frac{b}{a} = C e^{2x} - 3$$

— **Vérification** : $y' = 2C e^{2x}$ et $2y + 6 = 2C e^{2x} - 6 + 6 \checkmark$

— **Méthode sûre** : ne pas apprendre « $+b$ » ou « $-\frac{b}{a}$ » par cœur, mais **chercher la constante** en résolvant $0 = ak + b$.

Réponse. La bonne solution générale est $y(x) = C e^{2x} - 3$.

Correction de l'exercice 15 - Dater un décès

a) $T' = -kT + 20k$: équilibre 20, donc $T(t) = 20 + C e^{-kt}$, et $T(0) = 37$ donne $C = 17$:

$$T(t) = 20 + 17 e^{-kt}$$

b) **Deux mesures** :

— à la découverte : $20 + 17 e^{-kt_1} = 30$, soit $e^{-kt_1} = \frac{10}{17}$;

— une heure après : $e^{-k(t_1+1)} = \frac{8}{17}$.

En divisant la seconde par la première : $e^{-k} = \frac{8}{10} = 0,8$, donc $k = \ln 1,25 \approx 0,223$.

Puis $t_1 = \frac{1}{k} \ln \frac{17}{10} \approx \frac{0,531}{0,223} \approx 2,38 \text{ h}$, soit environ **2 h 23 min** avant la découverte.

— **Idée clé** : le quotient des deux mesures élimine l'inconnue t_1 et donne directement k .

Réponse. $k = \ln 1,25 \approx 0,223$; décès environ 2,4 h avant la découverte.