

Plaquette 2 - Primitives de fonctions composées

Primitives et équations différentielles — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Primitives des formes composées (u dérivable sur I) :

Forme de f	Primitive F	Condition
$u' u^n$ ($n \neq -1$)	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	$u > 0$ si $n < 0$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	$u \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u$	$u > 0$
$u' e^u$	e^u	
$u' \cos u$	$\sin u$	
$u' \sin u$	$-\cos u$	

Cas d'une fonction affine : une primitive de $g(ax + b)$ est $\frac{1}{a} G(ax + b)$ si G est une primitive de g . Par exemple :

$$e^{ax+b} \rightarrow \frac{1}{a} e^{ax+b} \quad \cos(ax+b) \rightarrow \frac{1}{a} \sin(ax+b)$$

Ajuster une constante : si $f = k u' u^n$ avec k constant, on sort k par linéarité. Si l'on trouve $2x$ au lieu de x , on écrit $x = \frac{1}{2} \times 2x$.

Toutes les fonctions n'ont pas de primitive « calculable » : par exemple e^{x^2} a des primitives, mais aucune ne s'écrit avec les fonctions usuelles.

Correction de l'exercice 1 - La forme $u' u$ puissance n

On reconnaît la forme

$$u' u^n \rightarrow \frac{u^{n+1}}{n+1}$$

a) $u = x^2 + 1$, $u' = 2x$, $n = 3$: $F(x) = \frac{(x^2 + 1)^4}{4}$.

b) $u = 3x - 1$, $u' = 3$. Il manque le facteur 3 : $g = \frac{1}{3} \times 3(3x - 1)^5$, donc

$$G(x) = \frac{1}{3} \times \frac{(3x - 1)^6}{6} = \frac{(3x - 1)^6}{18}.$$

c) $u = x^3 + 1$, $u' = 3x^2$. On écrit $x^2 = \frac{1}{3} \times 3x^2$: $H(x) = \frac{1}{3} \times \frac{(x^3 + 1)^5}{5} = \frac{(x^3 + 1)^5}{15}$.

— **Vérification de b)** : $G'(x) = \frac{6 \times 3(3x - 1)^5}{18} = (3x - 1)^5 \checkmark$

Réponse. a) $\frac{(x^2 + 1)^4}{4}$. b) $\frac{(3x - 1)^6}{18}$. c) $\frac{(x^3 + 1)^5}{15}$.

Correction de l'exercice 2 - La forme u' sur u carré

On reconnaît

$$\frac{u'}{u^2} \longrightarrow -\frac{1}{u}$$

(c'est le cas $n = -2$ de $u'u^n$).

a) $u = x^2 + 1, u' = 2x : F(x) = -\frac{1}{x^2 + 1}$.

b) $u = 2x + 1, u' = 2 : \text{on écrit } g = \frac{1}{2} \times \frac{2}{(2x + 1)^2}, \text{ donc } G(x) = -\frac{1}{2(2x + 1)}$.

— **Vérification de a)** : $F = -u^{-1}, F' = u^{-2} u' = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} \checkmark$

— **Piège** : ne pas confondre avec $\frac{u'}{u}$; le carré au dénominateur change tout (pas de logarithme ici).

Réponse. a) $-\frac{1}{x^2 + 1}$ · b) $-\frac{1}{2(2x + 1)}$.

Correction de l'exercice 3 - La forme u' sur racine de u

On reconnaît

$$\frac{u'}{\sqrt{u}} \longrightarrow 2\sqrt{u}$$

a) $u = x^2 + 4 > 0, u' = 2x$. On écrit $f = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 4}} :$

— $F(x) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{x^2 + 4}$.

b) $u = 3x + 1, u' = 3 : g = \frac{1}{3} \times \frac{3}{\sqrt{3x + 1}}, \text{ d'où}$

— $G(x) = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{3x + 1} = \frac{2}{3}\sqrt{3x + 1}$.

— **Vérification de a)** : $(\sqrt{x^2 + 4})' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} \checkmark$

Réponse. a) $\sqrt{x^2 + 4}$ · b) $\frac{2}{3}\sqrt{3x + 1}$.

Correction de l'exercice 4 - La forme u' sur u

On reconnaît, avec $u > 0$:

$$\frac{u'}{u} \longrightarrow \ln u$$

a) $u = x^2 + x + 1, u' = 2x + 1$. u est toujours positif ($\Delta = 1 - 4 < 0$) : $F(x) = \ln(x^2 + x + 1)$.

b) $u = 3x - 2 > 0$ sur l'intervalle, $u' = 3$: $G(x) = \ln(3x - 2)$.

c) $u = e^x + 5 > 0, u' = e^x$: $H(x) = \ln(e^x + 5)$.

— **Condition** $u > 0$: indispensable, sinon $\ln u$ n'existe pas ; c'est pour cela que l'intervalle est précisé en b).

— **Vérification de c)** : $H'(x) = \frac{e^x}{e^x + 5} \checkmark$

Réponse. a) $\ln(x^2 + x + 1)$ · b) $\ln(3x - 2)$ · c) $\ln(e^x + 5)$.

Correction de l'exercice 5 - La forme u' exponentielle de u

On reconnaît

$$u' e^u \rightarrow e^u$$

a) $u = 3x + 1, u' = 3 : f = \frac{1}{3} \times 3e^{3x+1}$, donc $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x+1}$.

b) $u = x^2 - x, u' = 2x - 1$: la forme est exacte, $G(x) = e^{x^2-x}$.

c) $u = \sqrt{x}, u' = \frac{1}{2\sqrt{x}} : h = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$, donc $H(x) = 2e^{\sqrt{x}}$.

— **Vérification de c)** : $(2e^{\sqrt{x}})' = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}} \checkmark$

— **Réflexe** : repérer dans l'exposant une fonction dont la dérivée apparaît en facteur.

Réponse. a) $\frac{1}{3}e^{3x+1}$ · b) e^{x^2-x} · c) $2e^{\sqrt{x}}$.

Correction de l'exercice 6 - Composées trigonométriques

On utilise les formes

$$u' \cos u \rightarrow \sin u \quad u' \sin u \rightarrow -\cos u \quad u' u^n \rightarrow \frac{u^{n+1}}{n+1}$$

a) $u = 2x, u' = 2 : F(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$.

b) $u = x^2, u' = 2x : g = \frac{1}{2} \times 2x \sin(x^2)$, donc $G(x) = -\frac{1}{2} \cos(x^2)$.

c) Avec $u = \cos x, u' = -\sin x : h = -u' u^2$, donc $H(x) = -\frac{\cos^3 x}{3}$.

— **Vérification de c)** : $\left(-\frac{\cos^3 x}{3}\right)' = -\frac{3 \cos^2 x \times (-\sin x)}{3} = \sin x \cos^2 x \checkmark$

Réponse. a) $\frac{1}{2} \sin(2x)$ · b) $-\frac{1}{2} \cos(x^2)$ · c) $-\frac{\cos^3 x}{3}$.

Correction de l'exercice 7 - Logarithmes composés

On repère $u = \ln x$ et $u' = \frac{1}{x}$.

a) $f(x) = \frac{1}{x} \times \ln x = u' u$, forme $u' u^n$ avec $n = 1$:

$$F(x) = \frac{(\ln x)^2}{2}$$

b) $g(x) = \frac{1/x}{\ln x} = \frac{u'}{u}$, avec $u = \ln x > 0$ sur $]1; +\infty[$:

— $G(x) = \ln(\ln x)$.

— **Vérification de b)** : $(\ln(\ln x))' = \frac{(\ln x)'}{\ln x} = \frac{1/x}{\ln x} \checkmark$

— **Pourquoi** $]1; +\infty[$: il faut $\ln x > 0$ pour que $\ln(\ln x)$ existe.

Réponse. a) $\frac{(\ln x)^2}{2}$ · b) $\ln(\ln x)$.

Correction de l'exercice 8 - Une composée avec condition initiale

On écrit $f = 2 \times \frac{2x}{x^2+1}$: c'est deux fois la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u = x^2 + 1 > 0$.

$$F(x) = 2 \ln(x^2 + 1) + C$$

- **Condition** : $F(0) = 2 \ln 1 + C = C = 1$.
- $F(x) = 2 \ln(x^2 + 1) + 1$.
- **Vérification** : $F'(x) = 2 \times \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{4x}{x^2 + 1} \checkmark$
- **Remarque** : on pouvait aussi écrire $F(x) = \ln\left((x^2 + 1)^2\right) + 1$.

Réponse. $F(x) = 2 \ln(x^2 + 1) + 1$.

Correction de l'exercice 9 - Quatre formes voisines

Avec $u = x + 2$ et $u' = 1$, chaque fonction relève d'une forme différente :

$$\frac{u'}{u} \rightarrow \ln u \quad \frac{u'}{u^2} \rightarrow -\frac{1}{u} \quad u' u^2 \rightarrow \frac{u^3}{3} \quad u' e^u \rightarrow e^u$$

- a) $\ln(x + 2)$ (valable car $x + 2 > 0$).
- b) $-\frac{1}{x + 2}$.
- c) $\frac{(x + 2)^3}{3}$.
- d) e^{x+2} .
- **Leçon** : des écritures proches donnent des primitives de natures très différentes (logarithme, fraction, polynôme, exponentielle) ; il faut **identifier la forme exacte** avant d'écrire.

Réponse. a) $\ln(x + 2)$ · b) $-\frac{1}{x + 2}$ · c) $\frac{(x + 2)^3}{3}$ · d) e^{x+2} .

Correction de l'exercice 10 - Diviser pour faire apparaître la forme

a) On réduit au même dénominateur :

$$1 - \frac{1}{x + 2} = \frac{x + 2 - 1}{x + 2} = \frac{x + 1}{x + 2} = f(x)$$

b) Par linéarité, avec $\frac{1}{x + 2} = \frac{u'}{u}$ ($u = x + 2 > 0$) :

- $F(x) = x - \ln(x + 2)$.
- **Vérification** : $F'(x) = 1 - \frac{1}{x + 2} = f(x) \checkmark$
- **Méthode** : quand le numérateur a le **même degré** que le dénominateur, on commence par faire apparaître la partie entière (ici 1).

Réponse. $F(x) = x - \ln(x + 2)$.

Correction de l'exercice 11 - Décomposer une fraction

a) Au même dénominateur :

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x + 1} = \frac{(x + 1) - x}{x(x + 1)} = \frac{1}{x(x + 1)} = f(x)$$

b) Chaque terme est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u > 0$:

- $F(x) = \ln x - \ln(x + 1) = \ln \frac{x}{x + 1}$.
- **Vérification** : $F'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x + 1} = f(x) \checkmark$

— **Remarque** : sans la décomposition, aucune forme usuelle n'apparaît ; c'est la **décomposition en éléments simples**, très utile en calcul intégral.

Réponse. $F(x) = \ln \frac{x}{x+1}$.

Correction de l'exercice 12 - Une primitive impossible à écrire

a) Formule du quotient, avec $(e^{x^2})' = 2xe^{x^2}$:

$$F'(x) = \frac{2xe^{x^2} \times 2x - e^{x^2} \times 2}{4x^2} = e^{x^2} \left(1 - \frac{1}{2x^2}\right) \neq e^{x^2}$$

La proposition est **fausse** : on ne peut pas « diviser par u' » quand u' n'est pas constant.

b) La forme $u'e^u$ exige le facteur $u' = 2x$ **dans** la fonction. Il est absent de e^{x^2} .

— En revanche, $g(x) = xe^{x^2} = \frac{1}{2} \times 2xe^{x^2}$ a pour primitive $\frac{1}{2}e^{x^2}$.

— **Culture** : e^{x^2} (comme e^{-x^2} , cruciale en probabilités) a des primitives, mais aucune ne s'exprime avec les fonctions usuelles.

Réponse. $F' \neq f$: il manque le facteur $u' = 2x$; en revanche $xe^{x^2} \rightarrow \frac{1}{2}e^{x^2}$.

Correction de l'exercice 13 - Un quotient d'exponentielles

On pose $u(x) = e^x + e^{-x}$, strictement positif. Sa dérivée vaut

$$u'(x) = e^x - e^{-x}$$

c'est exactement le numérateur. Donc $f = \frac{u'}{u}$, et

— $F(x) = \ln(e^x + e^{-x})$.

— **Vérification** : $F'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ ✓

— **Réflexe** : devant un quotient, **dériver le dénominateur** et comparer au numérateur.

— **Remarque** : F est paire et vaut $\ln 2$ en 0, son minimum ; cohérent avec $f(0) = 0$.

Réponse. $F(x) = \ln(e^x + e^{-x})$.

Correction de l'exercice 14 - Croissance d'une plante

a) h est la primitive de h' valant 2 en 0. Avec $u = t + 1 > 0$:

$$h(t) = 6 \ln(t + 1) + C$$

— $h(0) = 6 \ln 1 + C = C = 2$, donc $h(t) = 2 + 6 \ln(t + 1)$.

b) $h(10) = 2 + 6 \ln 11 \approx 2 + 6 \times 2,398 = 16,4$ cm.

c) $\ln(t + 1) \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$: dans ce modèle, la plante grandit **sans limite**, mais de plus en plus lentement ($h'(t) \rightarrow 0$).

— Pour doubler la hauteur atteinte à 10 semaines, il faudrait $6 \ln(t + 1) = 30,8$, soit $t \approx 170$ semaines — plus de trois ans : le modèle n'est réaliste que sur une courte période.

Réponse. a) $h(t) = 2 + 6 \ln(t + 1)$ · b) $\approx 16,4$ cm · c) oui mais de plus en plus lentement.

Correction de l'exercice 15 - Choisir entre deux formes

Avec $u = x^2 + 1 > 0$ et $u' = 2x$, on écrit chaque fois $x = \frac{1}{2}u'$:

$$\frac{u'}{u} \rightarrow \ln u \quad u'u^n \rightarrow \frac{u^{n+1}}{n+1}$$

a) $f = \frac{1}{2} \times \frac{u'}{u} : F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1).$

b) $g = \frac{1}{2} u'u^{-3} : G(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u^{-2}}{-2} = -\frac{1}{4(x^2 + 1)^2}.$

c) La dérivée de $u\sqrt{u}$ vaut $u'\sqrt{u} + u \times \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{3}{2}u'\sqrt{u} = 3x\sqrt{x^2 + 1}$. Il faut donc $k \times 3 = 1$, soit $H(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}$.

— **Méthode de c)** : quand aucune forme du tableau ne convient, on **devine la forme** de la primitive et on ajuste la constante en dérivant.

— **À retenir** : la même fonction u donne un logarithme **seulement** pour l'exposant -1 .

Réponse. a) $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$ · b) $-\frac{1}{4(x^2 + 1)^2}$ · c) $\frac{1}{3}(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}$.