

Plaquette 1 - Primitives usuelles et linéarité

Primitives et équations différentielles — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition. F est une primitive de f sur l'intervalle I si F est dérivable sur I et $F' = f$.

Toutes les primitives : si F est une primitive de f , les autres sont les fonctions $F + C$, C constante réelle. Une seule vérifie une condition $F(x_0) = y_0$.

Primitives usuelles (à une constante près) :

$f(x)$	$F(x)$	Intervalle
a (constante)	ax	$\mathbb{R}$
x^n ($n \neq -1$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$ ou $]0; +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$	$]0; +\infty[$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$]0; +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$

Linéarité : une primitive de $\alpha f + \beta g$ est $\alpha F + \beta G$.

$$F' = f \Leftrightarrow F \text{ est une primitive de } f$$

Réflexe : toujours **vérifier en dérivant** le résultat.

Correction de l'exercice 1 - Vérifier qu'une fonction est une primitive

Pour vérifier qu'une fonction est une primitive, il suffit de la **dériver** :

$$F \text{ primitive de } f \Leftrightarrow F' = f$$

a) Dérivée d'un produit pour $x \ln x$: $1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$. Donc

$$- F'(x) = \ln x + 1 - 1 = \ln x = f(x) \quad \checkmark$$

b) $(x \sin x)' = \sin x + x \cos x$ et $(\cos x)' = -\sin x$, donc

$$- G'(x) = \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x = g(x) \quad \checkmark$$

— **Remarque :** trouver ces primitives « à la main » est difficile (il faudra l'intégration par parties) ; les **vérifier** est immédiat.

Réponse. $F'(x) = \ln x$ et $G'(x) = x \cos x$.

Correction de l'exercice 2 - Primitives de polynômes

On utilise la **linéarité** et la primitive de x^n :

$$x^n \longrightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

a) Terme à terme : $4 \times \frac{x^4}{4} - 6 \times \frac{x^3}{3} + 2 \times \frac{x^2}{2} - 5x$, soit

— $F(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x$.

— **Vérification** : $F'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x - 5$ ✓

b) On **développe d'abord** : $g(x) = x^2 + x - 2$. Donc

— $G(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$.

— **Piège en b)** : la primitive d'un produit n'est **pas** le produit des primitives.

Réponse. a) $x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x$ · b) $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$.

Correction de l'exercice 3 - Inverses et racines

On lit le tableau des primitives usuelles, ou on écrit sous forme de puissance :

$$\frac{1}{x^n} = x^{-n} \rightarrow \frac{x^{-n+1}}{-n+1} \quad (n \neq 1)$$

a) $x^{-2} \rightarrow \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}$.

b) $\frac{3}{x} = 3 \times \frac{1}{x} \rightarrow 3 \ln x$ (le cas $n = 1$ donne le logarithme).

c) $\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 2\sqrt{x}$; vérification : $(2\sqrt{x})' = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ✓

d) $x^{-3} \rightarrow \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2x^2}$.

— **Piège** : la primitive de $\frac{1}{x^2}$ n'est pas $\ln(x^2)$; le logarithme n'apparaît que pour $\frac{1}{x}$.

Réponse. a) $-\frac{1}{x}$ · b) $3 \ln x$ · c) $2\sqrt{x}$ · d) $-\frac{1}{2x^2}$.

Correction de l'exercice 4 - Exponentielle et trigonométrie

On utilise les primitives usuelles et la linéarité :

$$e^x \rightarrow e^x \quad \cos x \rightarrow \sin x \quad \sin x \rightarrow -\cos x$$

a) $F(x) = e^x + \sin x$.

b) $G(x) = 2 \times (-\cos x) - 3e^x = -2 \cos x - 3e^x$.

c) $H(x) = \sin x + \cos x + \frac{x^2}{2}$ (la primitive de $-\sin x$ est $+\cos x$).

— **Vérification de b)** : $G'(x) = 2 \sin x - 3e^x$ ✓

— **Moyen de contrôle des signes** : on sait que $(\cos x)' = -\sin x$; donc une primitive de $\sin x$ est $-\cos x$.

Réponse. a) $e^x + \sin x$ · b) $-2 \cos x - 3e^x$ · c) $\sin x + \cos x + \frac{x^2}{2}$.

Correction de l'exercice 5 - Une famille de courbes

a) x^2 est une primitive de $2x$; toutes les primitives s'en déduisent en ajoutant une constante :

$$F_C(x) = x^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Graphiquement, leurs courbes se déduisent les unes des autres par **translation verticale** — elles ont la même pente en chaque abscisse, puisque $F_C' = f$.

b) On impose $F_C(1) = 3$:

- $1^2 + C = 3 \Leftrightarrow C = 2$.
- La primitive cherchée est $F(x) = x^2 + 2$.
- **À retenir** : une condition $F(x_0) = y_0$ sélectionne **une seule** primitive.

Réponse. a) $x^2 + C$ · b) $F(x) = x^2 + 2$.

Correction de l'exercice 6 - Primitive avec condition

Toutes les primitives : par linéarité,

$$F(x) = e^x - x^2 + C$$

Condition $F(0) = 3$:

- $e^0 - 0 + C = 3 \Leftrightarrow 1 + C = 3 \Leftrightarrow C = 2$.

$$F(x) = e^x - x^2 + 2$$

- **Vérification** : $F'(x) = e^x - 2x = f(x)$ ✓ et $F(0) = 1 + 2 = 3$ ✓
- **Piège** : oublier que $e^0 = 1$ et trouver $C = 3$.

Réponse. $F(x) = e^x - x^2 + 2$.

Correction de l'exercice 7 - De la vitesse à la position

a) La position est la **primitive** de la vitesse nulle en 0 :

$$x(t) = 9,8 \times \frac{t^2}{2} + 2t + C = 4,9t^2 + 2t + C$$

- $x(0) = 0$ donne $C = 0$: $x(t) = 4,9t^2 + 2t$.

b) $x(3) = 4,9 \times 9 + 6 = 44,1 + 6 = 50,1$ m.

- **Contrôle** : $x'(t) = 9,8t + 2 = v(t)$ ✓
- **Chaîne** : on passe de l'accélération à la vitesse, puis de la vitesse à la position, en prenant à chaque fois une **primitive** ; ici l'accélération vaut $v'(t) = 9,8$ m/s², celle de la pesanteur.

Réponse. a) $x(t) = 4,9t^2 + 2t$ · b) 50,1 m.

Correction de l'exercice 8 - Du coût marginal au coût total

a) C est la primitive de C' qui vaut 50 en 0 :

$$C(q) = 0,3 \times \frac{q^3}{3} - 2 \times \frac{q^2}{2} + 10q + K = 0,1q^3 - q^2 + 10q + K$$

- $C(0) = K = 50$, donc $C(q) = 0,1q^3 - q^2 + 10q + 50$.

b) $C(10) = 0,1 \times 1\,000 - 100 + 100 + 50 = 150$, soit 150 000 €.

- **Interprétation** : les coûts fixes sont la **constante** d'intégration — ils existent même sans rien produire.
- **Vérification** : $C'(q) = 0,3q^2 - 2q + 10$ ✓

Réponse. a) $C(q) = 0,1q^3 - q^2 + 10q + 50$ · b) 150 000 €.

Correction de l'exercice 9 - Simplifier avant d'intégrer

On **divise terme à terme** pour obtenir une somme de fonctions usuelles.

a) $f(x) = \frac{x^2}{x} + \frac{3x}{x} + \frac{1}{x} = x + 3 + \frac{1}{x}$, donc

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + 3x + \ln x$$

b) On développe le numérateur : $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$, puis

— $g(x) = 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$;

— $G(x) = x + 2 \ln x - \frac{1}{x}$.

— **Vérification de b)** : $G'(x) = 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$ ✓

— **Méthode** : un quotient dont le dénominateur est une simple puissance de x se découpe toujours ainsi.

Réponse. a) $\frac{x^2}{2} + 3x + \ln x$ · b) $x + 2 \ln x - \frac{1}{x}$.

Correction de l'exercice 10 - Lire les variations d'une primitive

a) $F' = f$: le **signe de f** donne les **variations de F** .

— $f(x) < 0$ pour $x < 1$ (droite sous l'axe) : F est **décroissante** sur $] -\infty ; 1]$.

— $f(x) > 0$ pour $x > 1$: F est **croissante** sur $[1 ; +\infty[$.

— F a donc un **minimum** en $x = 1$, égal à $F(1) = -2$.

b) $F(x) = \frac{x^2}{2} - x + C$, et

$$F(1) = \frac{1}{2} - 1 + C = -2 \Leftrightarrow C = -\frac{3}{2}$$

— $F(x) = \frac{x^2}{2} - x - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 2$: parabole de sommet $(1 ; -2)$ ✓

— **Piège** : ne pas lire les variations de F sur la courbe de f (la droite est croissante, mais F ne l'est pas partout).

Réponse. F décroît puis croît, minimum -2 en 1 ; $F(x) = \frac{x^2}{2} - x - \frac{3}{2}$.

Correction de l'exercice 11 - Deux primitives d'une même fonction

a) Même dénominateur :

$$F(x) - G(x) = \frac{2x-1+3}{x+1} = \frac{2x+2}{x+1} = \frac{2(x+1)}{x+1} = 2$$

b) $F - G$ est **constante**, donc $F' - G' = 0$: F et G ont la **même dérivée**. Elles sont donc primitives de la même fonction.

— $G(x) = -3(x+1)^{-1}$, donc $G'(x) = 3(x+1)^{-2} = \frac{3}{(x+1)^2}$.

— $f(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$.

— **Vérification sur F** (formule du quotient) : $F'(x) = \frac{2(x+1) - (2x-1)}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}$ ✓

— **À retenir** : deux primitives d'une même fonction sur un intervalle **diffèrent d'une constante**.

Réponse. $F - G = 2$; primitives de $f(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$.

Correction de l'exercice 12 - Confondre dériver et primitiver

Le test est toujours le même :

$$F \text{ convient} \Leftrightarrow F' = f$$

- **Première** : $(2x)' = 2 \neq x^2$. L'élève a **dérivé** au lieu de primitiver. Correct : $\frac{x^3}{3}$, car $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$ ✓
- **Deuxième** : $(\ln(x^2))' = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x} \neq \frac{1}{x^2}$. Correct : $-\frac{1}{x}$, car $\left(-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$ ✓
- **Troisième** : $(-\sin x)' = -\cos x$, erreur de signe. Correct : $\sin x$.
- **Conseil** : ne jamais rendre une primitive sans l'avoir **dérivée de tête** : c'est rapide et cela évite ces trois erreurs.

Réponse. $\frac{x^3}{3}$; $-\frac{1}{x}$; $\sin x$.

Correction de l'exercice 13 - Trouver les coefficients

On dérive F (produit, avec $(e^{2x})' = 2e^{2x}$) :

$$F'(x) = a e^{2x} + (ax + b) \times 2e^{2x} = (2ax + a + 2b) e^{2x}$$

On veut $F'(x) = x e^{2x}$ pour tout x ; on **identifie** les coefficients (l'exponentielle n'étant jamais nulle) :

- coefficient de x : $2a = 1$, donc $a = \frac{1}{2}$;
- terme constant : $a + 2b = 0$, donc $b = -\frac{1}{4}$.

$$F(x) = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) e^{2x}$$

- **Vérification** : $F'(x) = \frac{1}{2} e^{2x} + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) 2e^{2x} = \left(\frac{1}{2} + x - \frac{1}{2}\right) e^{2x} = x e^{2x}$ ✓

Réponse. $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{4}$.

Correction de l'exercice 14 - Remplir une cuve

a) V est la primitive de D telle que $V(0) = 10$:

$$V(t) = 2t + 0,5 \times \frac{t^2}{2} + C = 2t + \frac{t^2}{4} + C$$

- $V(0) = C = 10$, donc $V(t) = \frac{t^2}{4} + 2t + 10$.

b) $V(t) = 100 \Leftrightarrow \frac{t^2}{4} + 2t - 90 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 8t - 360 = 0$.

- $\Delta = 64 + 1440 = 1504$, $\sqrt{1504} \approx 38,78$.
- $t = \frac{-8 + 38,78}{2} \approx 15,4$ min (l'autre racine est négative).

- **Contrôle** : $V(15,4) \approx 59,3 + 30,8 + 10 = 100,1$ L ✓

Réponse. a) $V(t) = \frac{t^2}{4} + 2t + 10$ · b) environ 15,4 min.

Correction de l'exercice 15 - Primitive nulle en un point

a) Les primitives de f sont

$$F(x) = \sin x + \cos x + C$$

(la primitive de $-\sin x$ est $\cos x$).

$$- F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + C = \sqrt{2} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\sqrt{2}.$$

$$- F(x) = \sin x + \cos x - \sqrt{2}.$$

$$\text{b) } F(0) = 0 + 1 - \sqrt{2} = 1 - \sqrt{2} \approx -0,41 \text{ et } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 0 - \sqrt{2} = 1 - \sqrt{2}.$$

— **Remarque** : $\sin x + \cos x$ atteint son maximum $\sqrt{2}$ en $\frac{\pi}{4}$; donc $F(x) \leq 0$ partout, avec égalité en $\frac{\pi}{4}$ — cohérent avec $F'\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

Réponse. $F(x) = \sin x + \cos x - \sqrt{2}$; $F(0) = F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \sqrt{2}$.