Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : modèles différentiels et conditions initiales

Primitives et équations différentielles — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Primitives usuelles (à une constante additive près).

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ (n \neq -1) \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| \qquad \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x \qquad \int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$$

Formes composées — les quatre à reconnaître **immédiatement** :

$$\int u'u^n = \frac{u^{n+1}}{n+1} \qquad \int \frac{u'}{u} = \ln|u| \qquad \int u'\mathrm{e}^u = \mathrm{e}^u \qquad \int \frac{u'}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}$$

Unicité : deux primitives d'une même fonction sur un **intervalle** diffèrent d'une constante. Une **condition initiale** $F(x_0) = y_0$ détermine donc une primitive unique.

Équations différentielles.

— $y' = ay$: solutions $y(x) = C\mathrm{e}^{ax}$, $C \in \mathbb{R}$.

— $y' = ay + b$ (avec $a \neq 0$) : **solution particulière constante** $y_p = -\dfrac{b}{a}$, donc

$$y(x) = C\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$$

— **Problème de Cauchy** : la condition $y(x_0) = y_0$ donne **une unique** solution.

— **Équilibre** : $y_p = -\dfrac{b}{a}$ est un état stationnaire ; il est **attractif** si $a < 0$, **répulsif** si $a > 0$.

Modèles classiques.

— **Loi de Newton** : $T' = -k(T - T_{\text{ext}})$, donc $T(t) = T_{\text{ext}} + (T_0 - T_{\text{ext}})\mathrm{e}^{-kt}$.

— **Circuit RC** : $q' + \dfrac{q}{RC} = \dfrac{E}{R}$, de constante de temps $\tau = RC$.

— **Population avec prélèvement** : $P' = aP - c$.

Correction de l'exercice 1 – Primitives immédiates

a) On intègre terme à terme :

$$F(x) = x^3 - 4\ln x$$

b) $G(x) = 2\mathrm{e}^x + \cos x$ — attention au **signe** : la primitive de $-\sin$ est $+\cos$.

c) On écrit $h(x) = x^{-2}$, dont une primitive est $\dfrac{x^{-1}}{-1}$:

$$H(x) = -\frac{1}{x}$$

— **Contrôles par dérivation** : $F'(x) = 3x^2 - \dfrac{4}{x}$ ✓ ; $G'(x) = 2\mathrm{e}^x - \sin x$ ✓ ; $H'(x) = \dfrac{1}{x^2}$ ✓

— **Réflexe permanent** : **toujours dériver** sa primitive pour la vérifier — c'est gratuit et cela détecte immédiatement une erreur de signe ou de coefficient.

Réponse. a) $x^3 - 4\ln x$ · b) $2\mathrm{e}^x + \cos x$ · c) $-\dfrac{1}{x}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 2 – Forme u'/u

— **Pour** f : on reconnaît $\frac{u'}{u}$ avec $u = x^2 + 3 > 0$ et $u' = 2x$.

$$F(x) = \ln\left(x^2 + 3\right)$$

— **Pour** g : le numérateur est x, or $u' = 2x$ — il manque un facteur 2. On **ajuste** :

$$g(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2+1} \quad \Longrightarrow \quad G(x) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)$$

— **Contrôles** : $F'(x) = \frac{2x}{x^2+3}$ ✓ ; $G'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1}$ ✓

— **Pas de valeur absolue** ici : $x^2 + 3$ et $x^2 + 1$ sont **strictement positifs**, la valeur absolue est inutile.

— **Technique de l'ajustement** : si le numérateur n'est pas exactement u', on multiplie et divise par le coefficient manquant — jamais on ne « corrige » en fin de calcul.

Réponse. $\ln\left(x^2 + 3\right)$ et $\frac{1}{2}\ln\left(x^2 + 1\right)$.

Correction de l'exercice 3 – Forme u'e^u

— **Pour** f : avec $u = x^2$, on a $u' = 2x$ — il manque le facteur 2.

$$f(x) = \frac{1}{2} \times 2x\,\mathrm{e}^{x^2} \quad \Longrightarrow \quad F(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$$

— **Pour** g : on reconnaît $\frac{u'}{u^2} = u'u^{-2}$ avec $u = \mathrm{e}^x + 1$ et $u' = \mathrm{e}^x$.

— Une primitive de $u'u^{-2}$ est $\frac{u^{-1}}{-1} = -\frac{1}{u}$:

$$G(x) = -\frac{1}{\mathrm{e}^x + 1}$$

— **Contrôles** : $F'(x) = \frac{1}{2} \times 2x\mathrm{e}^{x^2} = x\mathrm{e}^{x^2}$ ✓ ; $G'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$ ✓

— **Remarque** : G est, à une constante près, la **fonction logistique** $\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$ — en effet $1 - \frac{1}{\mathrm{e}^x+1} = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$ ✓

Réponse. $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$ et $-\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}$.

Correction de l'exercice 4 – Primitive avec condition initiale

— **Primitives générales** :

$$F(x) = x^3 - x^2 + x + C$$

— **Condition initiale** : $F(1) = 1 - 1 + 1 + C = 1 + C = 5$, donc $C = 4$.

— **Solution unique** :

$$F(x) = x^3 - x^2 + x + 4$$

— **Vérifications** : $F(1) = 1 - 1 + 1 + 4 = 5$ ✓ ; $F'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = f(x)$ ✓

— **Unicité** : deux primitives sur un **intervalle** diffèrent d'une constante ; la condition $F(1) = 5$ fixe donc **une seule** fonction.

— **Attention** : sur un domaine formé de **plusieurs** intervalles (comme $\mathbb{R}^*$), la constante peut différer d'un intervalle à l'autre — l'unicité n'est garantie que sur un intervalle.

Réponse. $F(x) = x^3 - x^2 + x + 4$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 5 – Équation y' = ay

— **Solutions générales** : $y(x) = Ce^{-3x}$.
— **Condition initiale** : $y(0) = C = 4$, donc

$$y(x) = 4e^{-3x}$$

— **Vérification** : $y' = -12e^{-3x} = -3 \times 4e^{-3x} = -3y$ ✓
— **Résolution de** $y(x) = 1$: $e^{-3x} = \frac{1}{4}$, donc

$$-3x = -\ln 4 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{\ln 4}{3} = \frac{2\ln 2}{3} \approx 0{,}4621$$

— **Contrôle** : $4e^{-3 \times 0{,}4621} = 4 \times 0{,}25 = 1$ ✓
— **Demi-vie** : $\frac{\ln 2}{3} \approx 0{,}231$ — la valeur est divisée par 2 à chaque intervalle de cette durée, et 1 correspond à **deux** demi-vies ✓

Réponse. $y(x) = 4e^{-3x}$; $y = 1$ pour $x = \frac{2\ln 2}{3} \approx 0{,}462$.

Correction de l'exercice 6 – Équation y' = ay + b

— **Solution particulière constante** : $y_p = -\frac{b}{a} = -\frac{-6}{2} = 3$.
— **Vérification** : si $y = 3$, alors $y' = 0$ et $2 \times 3 - 6 = 0$ ✓
— **Solutions générales** : $y(x) = Ce^{2x} + 3$.
— **Condition initiale** : $y(0) = C + 3 = 1$, donc $C = -2$.

$$y(x) = 3 - 2e^{2x}$$

— **Vérification** : $y' = -4e^{2x}$ et $2y - 6 = 6 - 4e^{2x} - 6 = -4e^{2x}$ ✓
— **Comportement** : $a = 2 > 0$, donc l'équilibre $y = 3$ est **répulsif**. Partant de $1 < 3$, la solution **s'éloigne vers** $-\infty$.
— **Contrôles** : $y(1) = 3 - 2e^2 = 3 - 14{,}778 = -11{,}778$ ✓ ; $y(0{,}5) = 3 - 2e = -2{,}437$ ✓
— **Annulation** : $y(x) = 0$ pour $e^{2x} = 1{,}5$, soit $x = \frac{\ln 1{,}5}{2} \approx 0{,}2027$.

Réponse. $y(x) = 3 - 2e^{2x}$; équilibre 3 répulsif, $y \to -\infty$.

Correction de l'exercice 7 – Équation avec équilibre attractif

— **Réécriture** : $y' = -4y + 12$, donc $a = -4$ et $b = 12$.
— **Équilibre** : $y_p = -\frac{12}{-4} = 3$.
— **Solutions générales** : $y(x) = Ce^{-4x} + 3$.
— **Condition initiale** : $C + 3 = 0$, donc $C = -3$.

$$y(x) = 3\left(1 - e^{-4x}\right)$$

— **Limite** : $e^{-4x} \to 0$, donc $y \to 3$ — l'équilibre est **attractif** ($a = -4 < 0$).
— **Vérification** : $y' = 12e^{-4x}$ et $12 - 4y = 12 - 12 + 12e^{-4x} = 12e^{-4x}$ ✓
— **Contrôles** : $y(0{,}25) = 3\left(1 - e^{-1}\right) = 3 \times 0{,}6321 \approx 1{,}896$ ✓ ; $y(1) = 3 \times 0{,}9817 \approx 2{,}945$ ✓
— **Constante de temps** : $\tau = \frac{1}{4} = 0{,}25$; à $t = \tau$ on atteint 63 % de la valeur finale, à 3τ environ 95 % — repères universels de ce type de modèle.

Réponse. $y(x) = 3\left(1 - e^{-4x}\right) \to 3$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 8 – Loi de Newton (refroidissement)

a) - **Changement de variable** : on pose $u(t) = T(t) - 20$, donc $u' = T' = -0{,}03\,u$.

— Ainsi $u(t) = u(0)\mathrm{e}^{-0{,}03t}$ avec $u(0) = 90 - 20 = 70$.

$$T(t) = 20 + 70\,\mathrm{e}^{-0{,}03t}$$

— **Vérification** : $T(0) = 90$ ✓ et $T' = -2{,}1\mathrm{e}^{-0{,}03t} = -0{,}03\,(T - 20)$ ✓

b) On résout $20 + 70\mathrm{e}^{-0{,}03t} = 40$, soit $\mathrm{e}^{-0{,}03t} = \dfrac{20}{70} = \dfrac{2}{7}$.

$$t = \frac{\ln(7/2)}{0{,}03} = \frac{1{,}25276}{0{,}03} \approx 41{,}76 \text{ minutes}$$

— **Contrôle** : $T(41{,}76) = 20 + 70 \times 0{,}28571 \approx 20 + 20 = 40$ °C ✓

— **Comportement** : $T \to 20$ °C — la température de la pièce est une **asymptote**, jamais atteinte en temps fini.

— **Demi-écart** : l'écart avec la pièce est divisé par 2 toutes les $\dfrac{\ln 2}{0{,}03} \approx 23{,}1$ min ✓

Réponse. a) $T(t) = 20 + 70\mathrm{e}^{-0{,}03t}$ · b) $\approx 41{,}76$ min.

Correction de l'exercice 9 – Circuit RC

a) - **Réécriture** : $u' = -2u + 20$ (en divisant par $\tau = 0{,}5$).

— **Équilibre** : $u_p = \dfrac{20}{2} = 10 = E$ ✓

— **Solutions** : $u(t) = C\mathrm{e}^{-2t} + 10$; la condition $u(0) = 0$ donne $C = -10$.

$$u(t) = 10\left(1 - \mathrm{e}^{-2t}\right)$$

b) On résout $u(t) = 9$, soit $\mathrm{e}^{-2t} = 0{,}1$:

$$t = \frac{\ln 10}{2} = \frac{2{,}302585}{2} \approx 1{,}151 \text{ s}$$

— **Contrôle** : $u(1{,}151) = 10(1 - 0{,}1) = 9$ V ✓

— **En unités de τ** : $t = \dfrac{1{,}151}{0{,}5} = 2{,}30\,\tau$ — c'est le repère classique « 90 % à $2{,}3\tau$ ».

— **Autres repères** : 63 % à τ (6,32 V), 95 % à 3τ, 99 % à $4{,}6\tau$ ✓

— **Vérification de l'équation** : $u' = 20\mathrm{e}^{-2t}$ et $-2u + 20 = -20 + 20\mathrm{e}^{-2t} + 20 = 20\mathrm{e}^{-2t}$ ✓

Réponse. a) $u(t) = 10\left(1 - \mathrm{e}^{-2t}\right)$ · b) $t = \dfrac{\ln 10}{2} \approx 1{,}151$ s.

Correction de l'exercice 10 – Population avec prélèvement

— **Équilibre** : $P^* = \dfrac{200}{0{,}05} = 4\,000$ individus.

— **Solutions** : $P(t) = C\mathrm{e}^{0{,}05t} + 4000$; la condition $P(0) = 5000$ donne $C = 1\,000$.

$$P(t) = 4000 + 1000\,\mathrm{e}^{0{,}05t}$$

— **Comportement** : $a = 0{,}05 > 0$ et $C = 1000 > 0$, donc $P \to +\infty$ — la population **croît indéfiniment**.

— **Réponse** : oui, elle survit, car la population initiale dépasse le **seuil critique** de 4 000.

— **Contrôles** : $P(10) = 4000 + 1000 \times 1{,}6487 \approx 5\,649$ ✓ ; $P(20) = 4000 + 2718 = 6\,718$ ✓

— **Cas critique** : si $P(0) = 3\,000 < 4\,000$, on aurait $C = -1\,000$ et $P(t) = 4000 - 1000\mathrm{e}^{0{,}05t}$, qui **s'annule** pour $\mathrm{e}^{0{,}05t} = 4$, soit $t = \dfrac{\ln 4}{0{,}05} \approx 27{,}7$ ans —

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

extinction.

— **Leçon de modélisation** : l'équilibre est **répulsif** ; le sens de l'évolution dépend entièrement du **côté** où l'on démarre.

Réponse. $P(t) = 4000 + 1000\mathrm{e}^{0{,}05t} \to +\infty$: oui (seuil 4 000).

Correction de l'exercice 11 – Primitive et aire

— **Primitive nulle en** 0 :

$$F(x) = x^3 + 2x$$

— En effet $F(0) = 0$ ✓ et $F' = 3x^2 + 2 = f$ ✓

— **Aire** : f étant **positive** sur $[0\,;2]$, l'aire est

$$\int_0^2 f = F(2) - F(0) = 8 + 4 = 12$$

— **Unité** : 12 unités d'aire.

— **Contrôle d'encadrement** : sur $[0\,;2]$, f varie de 2 à 14 ; l'aire est donc entre $2 \times 2 = 4$ et $14 \times 2 = 28$ — 12 est bien dans cet intervalle ✓

— **Contrôle plus fin** : la valeur moyenne est $\dfrac{12}{2} = 6$, atteinte pour $3x^2 + 2 = 6$, soit $x = \sqrt{4\,/\,3} \approx 1{,}155$ — bien dans $[0\,;2]$ ✓

— **Lien fondamental** : l'aire sous une courbe se calcule par une **primitive** — c'est le théorème fondamental de l'analyse, au cœur du chapitre suivant.

Réponse. $F(x) = x^3 + 2x$; aire = 12 unités d'aire.

Correction de l'exercice 12 – Équation différentielle avec second membre variable

— **Vérification** : $y_p' = 1$, donc

$$y_p' - y_p = 1 - (x - 1) = 2 - x$$

— C'est bien le second membre : y_p est solution ✓

— **Équation homogène** : $y' = y$, de solutions $y_h = C\mathrm{e}^x$.

— **Structure** : la solution générale est la somme,

$$y(x) = x - 1 + C\mathrm{e}^x$$

— **Vérification globale** : $y' = 1 + C\mathrm{e}^x$, donc $y' - y = 1 + C\mathrm{e}^x - x + 1 - C\mathrm{e}^x = 2 - x$ ✓

— **Avec une condition initiale** $y(0) = 3$: $-1 + C = 3$, donc $C = 4$ et $y(x) = x - 1 + 4\mathrm{e}^x$.

— **Principe général** : pour une équation **linéaire**, solution générale = solution générale de l'homogène + **une** solution particulière. C'est la structure de tout ce chapitre.

— **Comportement** : si $C \neq 0$, le terme exponentiel **domine** en $+\infty$; sinon la solution est la droite $y = x - 1$.

Réponse. $y(x) = x - 1 + C\mathrm{e}^x$.

Correction de l'exercice 13 – Dissolution d'un médicament

— **Solution** : $Q(t) = 500\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}$.

— **Seuil** : on résout $500\mathrm{e}^{-0{,}2t} = 50$, soit $\mathrm{e}^{-0{,}2t} = 0{,}1$.

$$t = \frac{\ln 10}{0{,}2} = \frac{2{,}302585}{0{,}2} \approx 11{,}51 \text{ heures}$$

— **Réponse** : l'effet dure environ **11 h 31 min**.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Contrôle** : $Q(11{,}51) = 500 \times 0{,}1 = 50$ mg ✓

— **Demi-vie** : $\dfrac{\ln 2}{0{,}2} \approx 3{,}466$ h — la quantité passe de 500 à 250, 125, 62,5 mg en trois demi-vies (10,4 h), puis sous 50 mg peu après ✓

— **Application pratique** : pour maintenir l'effet, il faudrait une prise toutes les ≈ 11 h — c'est ainsi qu'on établit une posologie.

— **Cohérence du modèle** : Q reste **strictement positive** (l'exponentielle ne s'annule jamais), ce qui traduit une élimination progressive, jamais totale.

Réponse. $t = \dfrac{\ln 10}{0{,}2} \approx 11{,}51$ h.

Correction de l'exercice 14 – Primitive d'une fonction trigonométrique

Méthode 1 — forme $u'u$. Avec $u = \sin x$ et $u' = \cos x$:

$$f(x) = u'u \quad \Longrightarrow \quad F(x) = \frac{\sin^2 x}{2}$$

Méthode 2 — linéarisation. $\sin x \cos x = \dfrac{\sin(2x)}{2}$, donc

$$G(x) = -\frac{\cos(2x)}{4}$$

— **Les deux sont correctes** : $\dfrac{\sin^2 x}{2}$ et $-\dfrac{\cos 2x}{4}$ diffèrent d'une **constante**.

— **Vérification** : $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, donc $-\dfrac{\cos 2x}{4} = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{\sin^2 x}{2} = F(x) - \dfrac{1}{4}$ ✓

— **Contrôles par dérivation** : $F' = \dfrac{2 \sin x \cos x}{2} = \sin x \cos x$ ✓ ;
$G' = \dfrac{2 \sin 2x}{4} = \dfrac{\sin 2x}{2} = \sin x \cos x$ ✓

— **Leçon** : deux primitives d'apparence très différentes peuvent être **équivalentes** — la seule vérification fiable est la **dérivation**.

Réponse. $\dfrac{\sin^2 x}{2}$ ou $-\dfrac{\cos(2x)}{4}$ (à une constante près).

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : modèle complet

a) - **Réécriture** : $m' = -0{,}01\, m + 30$, donc $a = -0{,}01$ et $b = 30$.

— **Équilibre** : $m^* = \dfrac{30}{0{,}01} = 3\,000$ g.

— **Solutions** : $m(t) = Ce^{-0{,}01t} + 3000$; la condition $m(0) = 0$ donne $C = -3\,000$.

$$m(t) = 3000\left(1 - e^{-0{,}01t}\right)$$

— **Vérification** : $m' = 30e^{-0{,}01t}$, et $30 - \dfrac{m}{100} = 30 - 30 + 30e^{-0{,}01t}$ ✓

b) - **Masse limite** : $m \to 3\,000$ g $= 3$ kg.

— **Interprétation** : 3 000 g dans 1 000 L, soit 3 g/L — la cuve atteint la **concentration de la saumure injectée**, ce qui est physiquement attendu ✓

— **Moitié** : on résout $m(t) = 1\,500$, soit $e^{-0{,}01t} = 0{,}5$:

$$t = \frac{\ln 2}{0{,}01} \approx 69{,}31 \text{ minutes}$$

— **Contrôles** : $m(69{,}31) = 3000 \times 0{,}5 = 1\,500$ g ✓ ; $m(100) = 3000(1 - 0{,}3679) = 1\,896$ g ✓

— **Constante de temps** : $\tau = 100$ min — à $t = \tau$, on a 63 % de la masse finale (1 896 g) ✓

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. a) $m(t) = 3000\left(1 - \mathrm{e}^{-0{,}01t}\right)$. b) limite 3 kg ; moitié à $\dfrac{\ln 2}{0{,}01} \approx 69{,}3$ min.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).