

Plaquette 5 - Problèmes de synthèse : modèles différentiels et conditions initiales

Primitives et équations différentielles — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Primitives usuelles (à une constante additive près).

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1) \quad \int \frac{dx}{x} = \ln |x| \quad \int e^x dx = e^x$$

$$\int \cos x dx = \sin x \quad \int \sin x dx = -\cos x \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$$

Formes composées — les quatre à reconnaître **immédiatement** :

$$\int u' u^n = \frac{u^{n+1}}{n+1} \quad \int \frac{u'}{u} = \ln |u| \quad \int u' e^u = e^u \quad \int \frac{u'}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}$$

Unicité : deux primitives d'une même fonction sur un **intervalle** diffèrent d'une constante. Une **condition initiale** $F(x_0) = y_0$ détermine donc une primitive unique.

Équations différentielles.

— $y' = ay$: solutions $y(x) = Ce^{ax}$, $C \in \mathbb{R}$.

— $y' = ay + b$ (avec $a \neq 0$) : **solution particulière constante** $y_p = -\frac{b}{a}$, donc

$$y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$$

— **Problème de Cauchy** : la condition $y(x_0) = y_0$ donne **une unique** solution.

— **Équilibre** : $y_p = -\frac{b}{a}$ est un état stationnaire ; il est **attractif** si $a < 0$, **répulsif** si $a > 0$.

Modèles classiques.

— **Loi de Newton** : $T' = -k(T - T_{\text{ext}})$, donc $T(t) = T_{\text{ext}} + (T_0 - T_{\text{ext}})e^{-kt}$.

— **Circuit RC** : $q' + \frac{q}{RC} = \frac{E}{R}$, de constante de temps $\tau = RC$.

— **Population avec prélèvement** : $P' = aP - c$.

Correction de l'exercice 1 - Primitives immédiates

a) On intègre terme à terme :

$$F(x) = x^3 - 4 \ln x$$

b) $G(x) = 2e^x + \cos x$ — attention au **signe** : la primitive de $-\sin x$ est $+\cos x$.

c) On écrit $h(x) = x^{-2}$, dont une primitive est $\frac{x^{-1}}{-1}$:

$$H(x) = -\frac{1}{x}$$

— **Contrôles par dérivation** : $F'(x) = 3x^2 - \frac{4}{x}$ ✓ ; $G'(x) = 2e^x - \sin x$ ✓ ; $H'(x) = \frac{1}{x^2}$ ✓

— **Réflexe permanent** : **toujours dériver** sa primitive pour la vérifier — c'est gratuit et cela détecte immédiatement une erreur de signe ou de coefficient.

Réponse. a) $x^3 - 4 \ln x$ · b) $2e^x + \cos x$ · c) $-\frac{1}{x}$.

Correction de l'exercice 2 - Forme u'/u

- **Pour f** : on reconnaît $\frac{u'}{u}$ avec $u = x^2 + 3 > 0$ et $u' = 2x$.

$$F(x) = \ln(x^2 + 3)$$

- **Pour g** : le numérateur est x , or $u' = 2x$ — il manque un facteur 2. On **ajuste** :

$$g(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2 + 1} \implies G(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$$

- **Contrôles** : $F'(x) = \frac{2x}{x^2 + 3} \checkmark$; $G'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{x}{x^2 + 1} \checkmark$

- **Pas de valeur absolue** ici : $x^2 + 3$ et $x^2 + 1$ sont **strictement positifs**, la valeur absolue est inutile.

- **Technique de l'ajustement** : si le numérateur n'est pas exactement u' , on multiplie et divise par le coefficient manquant — jamais on ne « corrige » en fin de calcul.

Réponse. $\ln(x^2 + 3)$ et $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$.

Correction de l'exercice 3 - Forme $u'e^u$

- **Pour f** : avec $u = x^2$, on a $u' = 2x$ — il manque le facteur 2.

$$f(x) = \frac{1}{2} \times 2x e^{x^2} \implies F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2}$$

- **Pour g** : on reconnaît $\frac{u'}{u^2} = u' u^{-2}$ avec $u = e^x + 1$ et $u' = e^x$.

- Une primitive de $u' u^{-2}$ est $\frac{u^{-1}}{-1} = -\frac{1}{u}$:

$$G(x) = -\frac{1}{e^x + 1}$$

- **Contrôles** : $F'(x) = \frac{1}{2} \times 2x e^{x^2} = x e^{x^2} \checkmark$; $G'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \checkmark$

- **Remarque** : G est, à une constante près, la **fonction logistique** $\frac{e^x}{e^x + 1}$ — en effet
 $1 - \frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^x}{e^x + 1} \checkmark$

Réponse. $\frac{1}{2} e^{x^2}$ et $-\frac{1}{e^x + 1}$.

Correction de l'exercice 4 - Primitive avec condition initiale

- **Primitives générales** :

$$F(x) = x^3 - x^2 + x + C$$

- **Condition initiale** : $F(1) = 1 - 1 + 1 + C = 1 + C = 5$, donc $C = 4$.

- **Solution unique** :

$$F(x) = x^3 - x^2 + x + 4$$

- **Vérifications** : $F(1) = 1 - 1 + 1 + 4 = 5 \checkmark$; $F'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = f(x) \checkmark$

- **Unicité** : deux primitives sur un **intervalle** diffèrent d'une constante ; la condition $F(1) = 5$ fixe donc **une seule** fonction.

- **Attention** : sur un domaine formé de **plusieurs** intervalles (comme $\mathbb{R}^*$), la constante peut différer d'un intervalle à l'autre — l'unicité n'est garantie que sur un intervalle.

Réponse. $F(x) = x^3 - x^2 + x + 4$.

Correction de l'exercice 5 - Équation $y' = ay$

— **Solutions générales** : $y(x) = Ce^{-3x}$.

— **Condition initiale** : $y(0) = C = 4$, donc

$$y(x) = 4e^{-3x}$$

— **Vérification** : $y' = -12e^{-3x} = -3 \times 4e^{-3x} = -3y$ ✓

— **Résolution de $y(x) = 1$** : $e^{-3x} = \frac{1}{4}$, donc

$$-3x = -\ln 4 \implies x = \frac{\ln 4}{3} = \frac{2 \ln 2}{3} \approx 0,4621$$

— **Contrôle** : $4e^{-3 \times 0,4621} = 4 \times 0,25 = 1$ ✓

— **Demi-vie** : $\frac{\ln 2}{3} \approx 0,231$ — la valeur est divisée par 2 à chaque intervalle de cette durée, et 1 correspond à **deux** demi-vies ✓

Réponse. $y(x) = 4e^{-3x}$; $y = 1$ pour $x = \frac{2 \ln 2}{3} \approx 0,462$.

Correction de l'exercice 6 - Équation $y' = ay + b$

— **Solution particulière constante** : $y_p = -\frac{b}{a} = -\frac{-6}{2} = 3$.

— **Vérification** : si $y = 3$, alors $y' = 0$ et $2 \times 3 - 6 = 0$ ✓

— **Solutions générales** : $y(x) = Ce^{2x} + 3$.

— **Condition initiale** : $y(0) = C + 3 = 1$, donc $C = -2$.

$$y(x) = 3 - 2e^{2x}$$

— **Vérification** : $y' = -4e^{2x}$ et $2y - 6 = 6 - 4e^{2x} - 6 = -4e^{2x}$ ✓

— **Comportement** : $a = 2 > 0$, donc l'équilibre $y = 3$ est **répulsif**. Partant de $1 < 3$, la solution **s'éloigne vers** $-\infty$.

— **Contrôles** : $y(1) = 3 - 2e^2 = 3 - 14,778 = -11,778$ ✓ ; $y(0,5) = 3 - 2e = -2,437$ ✓

— **Annulation** : $y(x) = 0$ pour $e^{2x} = 1,5$, soit $x = \frac{\ln 1,5}{2} \approx 0,2027$.

Réponse. $y(x) = 3 - 2e^{2x}$; équilibre 3 répulsif, $y \rightarrow -\infty$.

Correction de l'exercice 7 - Équation avec équilibre attractif

— **Réécriture** : $y' = -4y + 12$, donc $a = -4$ et $b = 12$.

— **Équilibre** : $y_p = -\frac{12}{-4} = 3$.

— **Solutions générales** : $y(x) = Ce^{-4x} + 3$.

— **Condition initiale** : $C + 3 = 0$, donc $C = -3$.

$$y(x) = 3(1 - e^{-4x})$$

— **Limite** : $e^{-4x} \rightarrow 0$, donc $y \rightarrow 3$ — l'équilibre est **attractif** ($a = -4 < 0$).

— **Vérification** : $y' = 12e^{-4x}$ et $12 - 4y = 12 - 12 + 12e^{-4x} = 12e^{-4x}$ ✓

— **Contrôles** : $y(0,25) = 3(1 - e^{-1}) = 3 \times 0,6321 = 1,896$ ✓ ; $y(1) = 3 \times 0,9817 = 2,945$ ✓

— **Constante de temps** : $\tau = \frac{1}{4} = 0,25$; à $t = \tau$ on atteint 63 % de la valeur finale, à 3τ environ 95 % — repères universels de ce type de modèle.

Réponse. $y(x) = 3(1 - e^{-4x}) \rightarrow 3$.

Correction de l'exercice 8 - Loi de Newton (refroidissement)

a) - **Changement de variable** : on pose $u(t) = T(t) - 20$, donc $u' = T' = -0,03u$.

— Ainsi $u(t) = u(0)e^{-0,03t}$ avec $u(0) = 90 - 20 = 70$.

$$T(t) = 20 + 70e^{-0,03t}$$

— **Vérification** : $T(0) = 90$ ✓ et $T' = -2,1e^{-0,03t} = -0,03(T - 20)$ ✓

b) On résout $20 + 70e^{-0,03t} = 40$, soit $e^{-0,03t} = \frac{20}{70} = \frac{2}{7}$.

$$t = \frac{\ln(7/2)}{0,03} = \frac{1,25276}{0,03} \approx 41,76 \text{ minutes}$$

— **Contrôle** : $T(41,76) = 20 + 70 \times 0,28571 = 20 + 20 = 40$ °C ✓

— **Comportement** : $T \rightarrow 20$ °C — la température de la pièce est une **asymptote**, jamais atteinte en temps fini.

— **Demi-écart** : l'écart avec la pièce est divisé par 2 toutes les $\frac{\ln 2}{0,03} \approx 23,1$ min ✓

Réponse. a) $T(t) = 20 + 70e^{-0,03t}$ · b) $\approx 41,76$ min.

Correction de l'exercice 9 - Circuit RC

a) - **Réécriture** : $u' = -2u + 20$ (en divisant par $\tau = 0,5$).

— **Équilibre** : $u_p = \frac{20}{2} = 10 = E$ ✓

— **Solutions** : $u(t) = Ce^{-2t} + 10$; la condition $u(0) = 0$ donne $C = -10$.

$$u(t) = 10(1 - e^{-2t})$$

b) On résout $u(t) = 9$, soit $e^{-2t} = 0,1$:

$$t = \frac{\ln 10}{2} = \frac{2,302585}{2} \approx 1,151 \text{ s}$$

— **Contrôle** : $u(1,151) = 10(1 - 0,1) = 9$ V ✓

— **En unités de τ** : $t = \frac{1,151}{0,5} = 2,30 \tau$ — c'est le repère classique « 90 % à $2,3\tau$ ».

— **Autres repères** : 63 % à τ (6,32 V), 95 % à 3τ , 99 % à $4,6\tau$ ✓

— **Vérification de l'équation** : $u' = 20e^{-2t}$ et $-2u + 20 = -20 + 20e^{-2t} + 20 = 20e^{-2t}$ ✓

Réponse. a) $u(t) = 10(1 - e^{-2t})$ · b) $t = \frac{\ln 10}{2} \approx 1,151$ s.

Correction de l'exercice 10 - Population avec prélèvement

— **Équilibre** : $P^* = \frac{200}{0,05} = 4\,000$ individus.

— **Solutions** : $P(t) = Ce^{0,05t} + 4000$; la condition $P(0) = 5000$ donne $C = 1\,000$.

$$P(t) = 4000 + 1000e^{0,05t}$$

— **Comportement** : $a = 0,05 > 0$ et $C = 1000 > 0$, donc $P \rightarrow +\infty$ — la population **croît indéfiniment**.

— **Réponse** : oui, elle survit, car la population initiale dépasse le **seuil critique** de 4 000.

— **Contrôles** : $P(10) = 4000 + 1000 \times 1,6487 = 5\,649$ ✓ ; $P(20) = 4000 + 2718 = 6\,718$ ✓

— **Cas critique** : si $P(0) = 3\,000 < 4\,000$, on aurait $C = -1\,000$ et

$P(t) = 4000 - 1000e^{0,05t}$, qui **s'annule** pour $e^{0,05t} = 4$, soit $t = \frac{\ln 4}{0,05} \approx 27,7$ ans —

extinction.

- **Leçon de modélisation** : l'équilibre est **répulsif** ; le sens de l'évolution dépend entièrement du **côté** où l'on démarre.

Réponse. $P(t) = 4000 + 1000e^{0,05t} \rightarrow +\infty$: oui (seuil 4 000).

Correction de l'exercice 11 - Primitive et aire

- **Primitive nulle en 0** :

$$F(x) = x^3 + 2x$$

- En effet $F(0) = 0$ ✓ et $F' = 3x^2 + 2 = f$ ✓
- **Aire** : f étant **positive** sur $[0; 2]$, l'aire est

$$\int_0^2 f = F(2) - F(0) = 8 + 4 = 12$$

- **Unité** : 12 unités d'aire.
- **Contrôle d'encadrement** : sur $[0; 2]$, f varie de 2 à 14 ; l'aire est donc entre $2 \times 2 = 4$ et $14 \times 2 = 28$ — 12 est bien dans cet intervalle ✓
- **Contrôle plus fin** : la valeur moyenne est $\frac{12}{2} = 6$, atteinte pour $3x^2 + 2 = 6$, soit $x = \sqrt{4/3} \approx 1,155$ — bien dans $[0; 2]$ ✓
- **Lien fondamental** : l'aire sous une courbe se calcule par une **primitive** — c'est le théorème fondamental de l'analyse, au cœur du chapitre suivant.

Réponse. $F(x) = x^3 + 2x$; aire = 12 unités d'aire.

Correction de l'exercice 12 - Équation différentielle avec second membre variable

- **Vérification** : $y_p' = 1$, donc

$$y_p' - y_p = 1 - (x - 1) = 2 - x$$

- C'est bien le second membre : y_p est solution ✓
- **Équation homogène** : $y' = y$, de solutions $y_h = Ce^x$.
- **Structure** : la solution générale est la somme,

$$y(x) = x - 1 + Ce^x$$

- **Vérification globale** : $y' = 1 + Ce^x$, donc $y' - y = 1 + Ce^x - x + 1 - Ce^x = 2 - x$ ✓
- **Avec une condition initiale** $y(0) = 3$: $-1 + C = 3$, donc $C = 4$ et $y(x) = x - 1 + 4e^x$.
- **Principe général** : pour une équation **linéaire**, solution générale = solution générale de l'homogène + **une** solution particulière. C'est la structure de tout ce chapitre.
- **Comportement** : si $C \neq 0$, le terme exponentiel **domine** en $+\infty$; sinon la solution est la droite $y = x - 1$.

Réponse. $y(x) = x - 1 + Ce^x$.

Correction de l'exercice 13 - Dissolution d'un médicament

- **Solution** : $Q(t) = 500e^{-0,2t}$.
- **Seuil** : on résout $500e^{-0,2t} = 50$, soit $e^{-0,2t} = 0,1$.

$$t = \frac{\ln 10}{0,2} = \frac{2,302585}{0,2} \approx 11,51 \text{ heures}$$

- **Réponse** : l'effet dure environ **11 h 31 min**.

- **Contrôle** : $Q(11,51) = 500 \times 0,1 = 50$ mg ✓
- **Demi-vie** : $\frac{\ln 2}{0,2} \approx 3,466$ h — la quantité passe de 500 à 250, 125, 62,5 mg en trois demi-vies (10,4 h), puis sous 50 mg peu après ✓
- **Application pratique** : pour maintenir l'effet, il faudrait une prise toutes les ≈ 11 h — c'est ainsi qu'on établit une posologie.
- **Cohérence du modèle** : Q reste **strictement positive** (l'exponentielle ne s'annule jamais), ce qui traduit une élimination progressive, jamais totale.

Réponse. $t = \frac{\ln 10}{0,2} \approx 11,51$ h.

Correction de l'exercice 14 - Primitive d'une fonction trigonométrique

Méthode 1 — forme $u'u$. Avec $u = \sin x$ et $u' = \cos x$:

$$f(x) = u'u \implies F(x) = \frac{\sin^2 x}{2}$$

Méthode 2 — linéarisation. $\sin x \cos x = \frac{\sin(2x)}{2}$, donc

$$G(x) = -\frac{\cos(2x)}{4}$$

- **Les deux sont correctes** : $\frac{\sin^2 x}{2}$ et $-\frac{\cos 2x}{4}$ diffèrent d'une **constante**.
- **Vérification** : $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$, donc $-\frac{\cos 2x}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{\sin^2 x}{2} = F(x) - \frac{1}{4}$ ✓
- **Contrôles par dérivation** : $F' = \frac{2 \sin x \cos x}{2} = \sin x \cos x$ ✓ ;
 $G' = \frac{2 \sin 2x}{4} = \frac{\sin 2x}{2} = \sin x \cos x$ ✓
- **Leçon** : deux primitives d'apparence très différentes peuvent être **équivalentes** — la seule vérification fiable est la **dérivation**.

Réponse. $\frac{\sin^2 x}{2}$ ou $-\frac{\cos(2x)}{4}$ (à une constante près).

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : modèle complet

a) - **Réécriture** : $m' = -0,01 m + 30$, donc $a = -0,01$ et $b = 30$.

- **Équilibre** : $m^* = \frac{30}{0,01} = 3\,000$ g.
- **Solutions** : $m(t) = Ce^{-0,01t} + 3000$; la condition $m(0) = 0$ donne $C = -3\,000$.

$$m(t) = 3000(1 - e^{-0,01t})$$

- **Vérification** : $m' = 30e^{-0,01t}$, et $30 - \frac{m}{100} = 30 - 30 + 30e^{-0,01t}$ ✓

b) - **Masse limite** : $m \rightarrow 3\,000$ g = 3 kg.

- **Interprétation** : 3 000 g dans 1 000 L, soit 3 g/L — la cuve atteint la **concentration de la saumure injectée**, ce qui est physiquement attendu ✓
- **Moitié** : on résout $m(t) = 1\,500$, soit $e^{-0,01t} = 0,5$:

$$t = \frac{\ln 2}{0,01} \approx 69,31 \text{ minutes}$$

- **Contrôles** : $m(69,31) = 3000 \times 0,5 = 1\,500$ g ✓ ; $m(100) = 3000(1 - 0,3679) = 1\,896$ g ✓
- **Constante de temps** : $\tau = 100$ min — à $t = \tau$, on a 63 % de la masse finale (1 896 g) ✓

Réponse. a) $m(t) = 3000(1 - e^{-0,01t})$ · b) limite 3 kg ; moitié à $\frac{\ln 2}{0,01} \approx 69,3$ min.