

Plaquette 3 - Équations différentielles $y' = ay$

Primitives et équations différentielles — Terminale spé maths

Exercices

Méthode

Une équation $y' = ay$ dit que la **vitesse de variation** est proportionnelle à la quantité elle-même : croissance ou décroissance **exponentielle**. On écrit d'abord l'équation sous la forme $y' = ay$ pour lire a , on donne les solutions Ce^{ax} , puis on fixe C avec la **condition initiale**.

Exercice 1 - Vérifier une solution

- a) Vérifier que $f(x) = 3e^{2x}$ est solution de l'équation $y' = 2y$.
- b) La fonction $g(x) = e^{2x} + 1$ est-elle solution de cette équation ?
- c) Même question pour la fonction nulle.

Exercice 2 - Lire le coefficient a

Donner les solutions générales des équations :

- a) $y' = 5y$
- b) $y' + 2y = 0$
- c) $3y' = y$
- d) $y' - 0,4y = 0$

Exercice 3 - Une condition initiale en zéro

Déterminer la solution f de $y' = 0,5y$ telle que $f(0) = 4$, puis calculer $f(2)$ et $f(4)$.

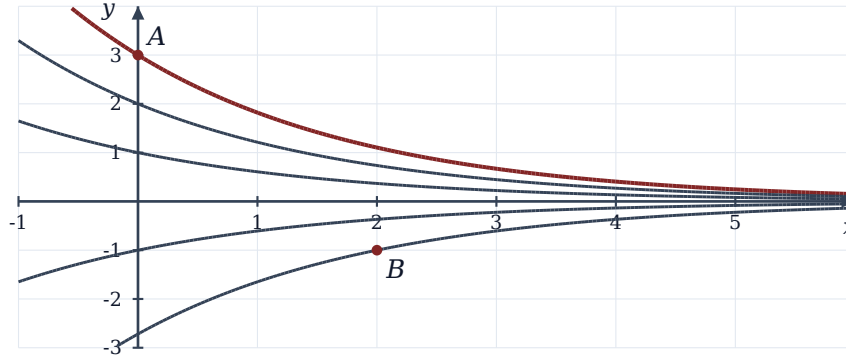
Exercice 4 - Une condition en un autre point

Déterminer la solution g de $y' = -y$ telle que $g(1) = 2$. Calculer $g(0)$.

Exercice 5 - Courbes intégrales

On a tracé plusieurs solutions de l'équation $y' = -0,5y$.

- Donner l'expression de toutes les solutions.
- Déterminer celle qui passe par le point $A(0; 3)$, et celle qui passe par $B(2; -1)$.
- Deux courbes distinctes peuvent-elles se couper ?



Quelques solutions de $y' = -0,5y$

Exercice 6 - Retrouver a à partir de deux valeurs

Une fonction f vérifie $f' = af$, avec $f(0) = 5$ et $f(3) = 40$.

- Déterminer a .
- Quel est le temps de doublement de f ?

Exercice 7 - Iode radioactif

Le nombre de noyaux d'iode 131 vérifie $N' = -\lambda N$, et sa demi-vie est de 8 jours.

- Déterminer λ .
- Quelle proportion de l'iode initial reste-t-il au bout de 30 jours ?

Exercice 8 - Bactéries qui doublent

Une population de bactéries double toutes les 20 minutes. On suppose que $N' = kN$ (t en minutes) et $N(0) = 100$.

- Déterminer k .
- Combien y a-t-il de bactéries au bout de 2 heures ?

Exercice 9 - Démontrer le théorème

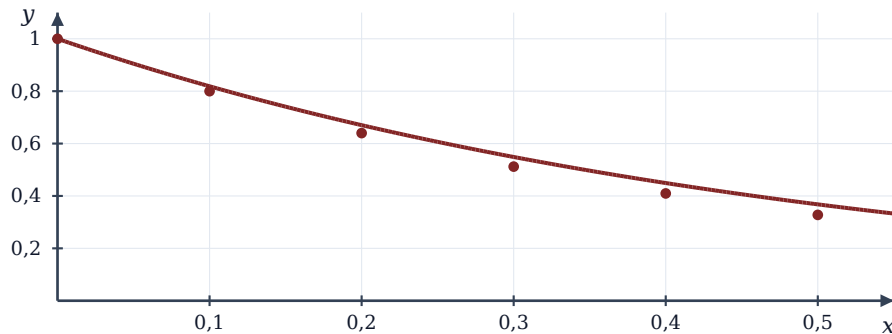
Soit f une solution de $y' = ay$ sur $\mathbb{R}$. On pose $g(x) = f(x)e^{-ax}$.

- Calculer $g'(x)$ et montrer que $g' = 0$.
- En déduire que $f(x) = Ce^{ax}$ pour une constante C .

Exercice 10 - La méthode d'Euler

On veut approcher la solution de $y' = -2y$, $y(0) = 1$ sur $[0 ; 0,5]$ avec un pas $h = 0,1$.

- Justifier la relation $y(x + h) \approx 0,8 y(x)$.
- Calculer les valeurs approchées en $0,1 ; 0,2 ; \dots ; 0,5$, puis comparer à la valeur exacte en $0,5$.



Solution exacte (courbe) et points de la méthode d'Euler

Exercice 11 - Signe et sens de variation des solutions

Soit $a < 0$ et f une solution non nulle de $y' = ay$.

- Montrer que f garde un signe constant.
- Étudier son sens de variation selon le signe de $f(0)$, et sa limite en $+\infty$.

Exercice 12 - Changement de fonction inconnue

Soit y une solution de $y' = 3y$ et $z = y^2$.

- Montrer que $z' = 6z$.
- Vérifier la cohérence avec l'expression de y .

Exercice 13 - La pression en altitude

La pression atmosphérique P (en hPa) en fonction de l'altitude h (en km) vérifie $P' = -0,12P$ et $P(0) = 1\,013$.

- Exprimer $P(h)$.
- Calculer la pression au sommet de l'Everest (8,849 km).
- À quelle altitude la pression vaut-elle 500 hPa ?

Exercice 14 - Absorption de la lumière

L'intensité I d'un faisceau lumineux qui traverse une épaisseur x (en cm) d'eau trouble vérifie $I' = -0,4I$.

- Exprimer $I(x)$ en fonction de l'intensité incidente I_0 .
- Quelle épaisseur faut-il pour que l'intensité soit divisée par 10 ?

Exercice 15 – Deux solutions ne se croisent pas

Soit f et g deux solutions de $y' = 2y$ avec $f(0) = 1$ et $g(0) = 3$.

- a) Exprimer f et g , puis calculer $g(x) - f(x)$.
- b) En déduire que les courbes de f et g ne se coupent pas, et étudier l'écart quand $x \rightarrow +\infty$ et $x \rightarrow -\infty$.