

Plaque 4 - Équations différentielles $y' = ay + b$

Primitives et équations différentielles — Terminale spé maths

Exercices

Méthode

Pour $y' = ay + b$ ($a \neq 0$) : **1)** chercher la **solution constante** $-\frac{b}{a}$ (l'état d'équilibre) ; **2)** ajouter les solutions de l'équation **homogène** $y' = ay$; **3)** fixer la constante avec la **condition initiale**. Si $a < 0$, toutes les solutions tendent vers l'équilibre ; si $a > 0$, elles s'en écartent.

Exercice 1 - Chercher l'équilibre

Déterminer la solution constante de chaque équation :

- a) $y' = 3y - 6$
- b) $y' = -0,5y + 10$
- c) $2y' + 8y = 4$

Exercice 2 - Solution générale

Résoudre l'équation différentielle $y' = 2y + 4$, puis déterminer la solution f telle que $f(0) = 1$.

Exercice 3 - Convergence vers l'équilibre

Déterminer la solution f de $y' = -3y + 9$ vérifiant $f(0) = 1$, puis sa limite en $+\infty$.

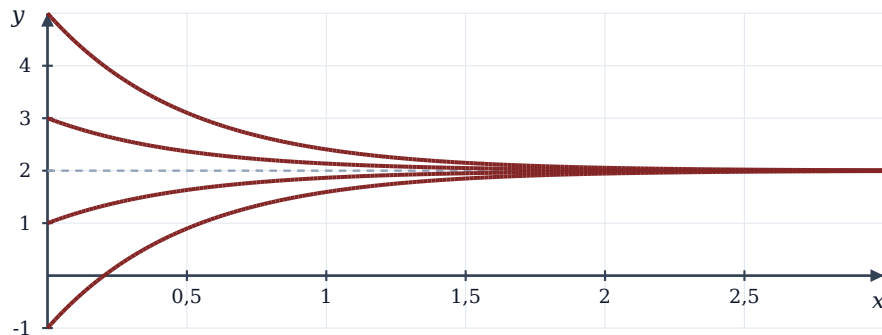
Exercice 4 - Mettre sous la bonne forme

Résoudre l'équation $2y' + y = 6$ et déterminer la solution qui vaut 0 en 0.

Exercice 5 - Équilibre stable ou instable

On a tracé plusieurs solutions de $y' = -2y + 4$.

- Déterminer l'équilibre et l'expression des solutions.
- Que deviennent les solutions quand $x \rightarrow +\infty$?
- Comparer avec l'équation $y' = 2y - 4$.

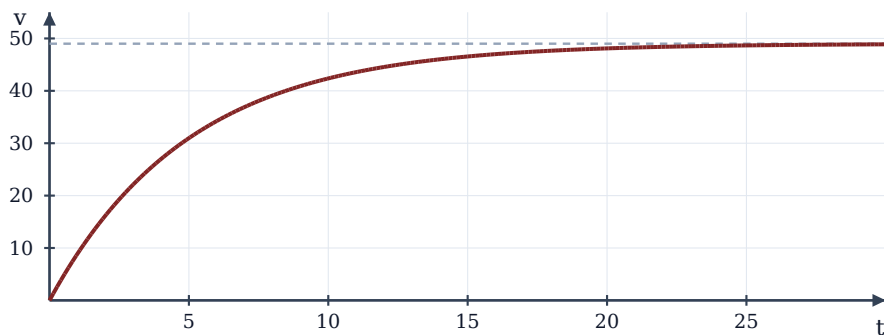


Solutions de $y' = -2y + 4$ et droite d'équilibre $y = 2$

Exercice 6 - Chute avec frottements

Un objet tombe sans vitesse initiale ; sa vitesse (en m/s) vérifie $v' = 9,8 - 0,2v$ et $v(0) = 0$.

- Déterminer $v(t)$ et la vitesse limite.
- Au bout de combien de temps l'objet atteint-il 45 m/s ?



Vitesse de chute et vitesse limite (pointillé)

Exercice 7 - Chauffer une pièce

Dans une pièce chauffée, la température T (en $^{\circ}\text{C}$, t en minutes) vérifie $T' = -0,1(T - 10) + 2$ et $T(0) = 10$.

- Écrire l'équation sous la forme $T' = aT + b$ et déterminer la température d'équilibre.
- Déterminer $T(t)$, puis l'instant où la pièce atteint 25°C .

Exercice 8 - Épargne en continu

On verse de l'argent en continu sur un compte, au rythme de 1 200 € par an, et le capital rapporte 3 % par an. Le capital $S(t)$ vérifie $S' = 0,03S + 1\,200$ avec $S(0) = 0$.

- a) Déterminer $S(t)$.
- b) Calculer le capital au bout de 10 ans et le comparer aux sommes versées.

Exercice 9 - Un second membre non constant

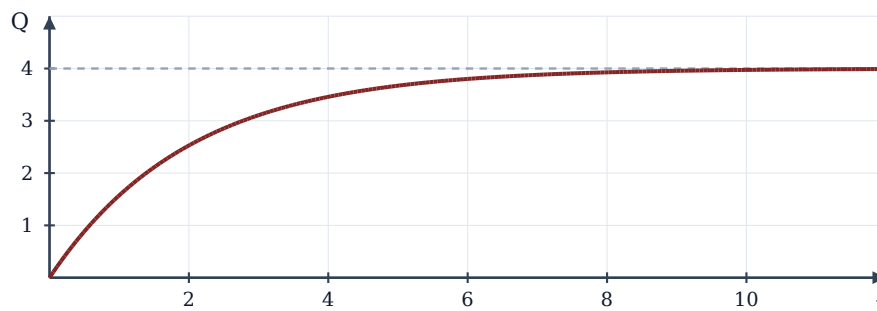
On considère l'équation (E) : $y' + y = e^{-x}$.

- a) Vérifier que $y_p(x) = x e^{-x}$ est une solution de (E).
- b) En déduire toutes les solutions de (E), puis celle qui vaut 2 en 0.

Exercice 10 - Une perfusion

Un patient reçoit un médicament par perfusion à débit constant (2 mg/h), éliminé naturellement à raison de 50 % par heure. La quantité Q (en mg) vérifie $Q' = -0,5Q + 2$ et $Q(0) = 0$.

- a) Déterminer $Q(t)$ et sa limite.
- b) Au bout de combien de temps atteint-on 90 % de cette limite ?



Quantité de médicament dans le sang

Exercice 11 - Retrouver l'équation

Une fonction f est solution d'une équation $y' = ay + b$ ($a \neq 0$). On sait que $f(0) = 1$, $f(1) = 3$ et que f tend vers 5 en $+\infty$.

Déterminer a , b et f .

Exercice 12 - Population avec immigration

Une ville compte 1 000 habitants. Sa population croît naturellement de 2 % par an et accueille 100 nouveaux habitants par an : $P' = 0,02P + 100$, $P(0) = 1\,000$.

- a) Déterminer $P(t)$.
- b) Calculer la population au bout de 10 ans.

Exercice 13 - Établissement du courant

Dans un circuit comportant une bobine ($L = 0,5$ H) et une résistance ($R = 10\ \Omega$) alimentées sous $E = 5$ V, l'intensité vérifie $L i' + R i = E$ et $i(0) = 0$.

- a) Écrire l'équation sous la forme $i' = ai + b$ et la résoudre.
- b) Donner l'intensité limite, la constante de temps $\tau = \frac{L}{R}$ et l'intensité à $t = 3\tau$.

Exercice 14 - Une erreur de signe

Pour résoudre $y' = 2y + 6$, un élève écrit : « les solutions sont $y(x) = Ce^{2x} + 6$ ».

- Vérifier si $y(x) = e^{2x} + 6$ est solution.
- Corriger la solution générale.

Exercice 15 - Dater un décès

Un corps est découvert dans une pièce à 20 °C. Sa température T (en °C) suit $T' = -k(T - 20)$, et vaut 37 °C au moment du décès. À la découverte, elle vaut 30 °C ; une heure plus tard, 28 °C.

On note t_1 le temps (en heures) écoulé entre le décès et la découverte.

- Montrer que $T(t) = 20 + 17e^{-kt}$, t étant compté depuis le décès.
- Déterminer k , puis t_1 .