

Plaquette 2 - Primitives de fonctions composées

Primitives et équations différentielles — Terminale spé maths

Exercices

Méthode

Devant une fonction qui n'est pas dans le tableau usuel, on cherche une **forme composée** : repérer une fonction u **et sa dérivée** u' dans l'expression ($u'u^n$, $\frac{u'}{u}$, $u'e^u$...). S'il manque un facteur constant, on l'**ajuste** en multipliant et divisant. On vérifie toujours en dérivant.

Exercice 1 - La forme $u' u$ puissance n

Déterminer une primitive de :

a) $f(x) = 2x(x^2 + 1)^3$

b) $g(x) = (3x - 1)^5$

c) $h(x) = x^2(x^3 + 1)^4$

Exercice 2 - La forme $u' u$ sur u carré

Déterminer une primitive de :

a) $f(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$ sur $\mathbb{R}$

b) $g(x) = \frac{1}{(2x + 1)^2}$ sur $\left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[$

Exercice 3 - La forme $u' u$ sur racine de u

Déterminer une primitive de :

a) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$ sur $\mathbb{R}$

b) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{3x + 1}}$ sur $\left] -\frac{1}{3}; +\infty \right[$

Exercice 4 - La forme $u' u$ sur u

Déterminer une primitive de :

a) $f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$ sur $\mathbb{R}$

b) $g(x) = \frac{3}{3x - 2}$ sur $\left] \frac{2}{3}; +\infty \right[$

c) $h(x) = \frac{e^x}{e^x + 5}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 5 - La forme u' exponentielle de u

Déterminer une primitive de :

a) $f(x) = e^{3x+1}$

b) $g(x) = (2x - 1)e^{x^2-x}$

c) $h(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ sur $]0; +\infty[$

Exercice 6 - Composées trigonométriques

Déterminer une primitive de :

a) $f(x) = \cos(2x)$

b) $g(x) = x \sin(x^2)$

c) $h(x) = \sin x \cos^2 x$

Exercice 7 - Logarithmes composés

Déterminer une primitive de :

a) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur $]0; +\infty[$

b) $g(x) = \frac{1}{x \ln x}$ sur $]1; +\infty[$

Exercice 8 - Une composée avec condition initiale

Déterminer la primitive F de $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 1$.

Exercice 9 - Quatre formes voisines

Déterminer une primitive sur $] -2; +\infty[$ de chacune des fonctions :

a) $\frac{1}{x+2}$

b) $\frac{1}{(x+2)^2}$

c) $(x+2)^2$

d) e^{x+2}

Exercice 10 - Diviser pour faire apparaître la forme

Soit $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ sur $] -2; +\infty[$.

a) Montrer que $f(x) = 1 - \frac{1}{x+2}$.

b) En déduire une primitive de f .

Exercice 11 - Décomposer une fraction

Soit $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$ sur $]0; +\infty[$.

a) Vérifier que $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.

b) En déduire une primitive de f , écrite avec un seul logarithme.

Exercice 12 - Une primitive impossible à écrire

Un élève affirme qu'une primitive de $f(x) = e^{x^2}$ est $F(x) = \frac{e^{x^2}}{2x}$.

a) Dériver F et conclure.

b) Pourquoi la méthode « $u'e^u$ » ne s'applique-t-elle pas ici ? Comparer avec $g(x) = xe^{x^2}$.

Exercice 13 - Un quotient d'exponentielles

Soit $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ sur $\mathbb{R}$.

Déterminer une primitive de f en reconnaissant une forme usuelle.

Exercice 14 - Croissance d'une plante

La vitesse de croissance d'une plante (en cm par semaine) est $h'(t) = \frac{6}{t+1}$, t en semaines, et sa hauteur initiale vaut $h(0) = 2$ cm.

a) Déterminer $h(t)$.

b) Calculer la hauteur au bout de 10 semaines.

c) La plante grandit-elle indéfiniment ?

Exercice 15 - Choisir entre deux formes

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de :

a) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

b) $g(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^3}$

c) $h(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$, en cherchant une primitive de la forme $k(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}$