

# Plaquette 1 - Primitives usuelles et linéarité

## Primitives et équations différentielles — Terminale spé maths

### Exercices

#### Méthode

Chercher une primitive, c'est **dériver à l'envers** : on cherche  $F$  telle que  $F' = f$ . On découpe  $f$  en une **somme** de termes simples (linéarité), on applique le tableau des primitives usuelles terme à terme, puis on **vérifie en dérivant**. Une condition du type  $F(a) = b$  fixe la constante.

#### Exercice 1 - Vérifier qu'une fonction est une primitive

- a) Montrer que  $F(x) = x \ln x - x$  est une primitive de  $f(x) = \ln x$  sur  $]0; +\infty[$ .
- b) Montrer que  $G(x) = x \sin x + \cos x$  est une primitive de  $g(x) = x \cos x$  sur  $\mathbb{R}$ .

#### Exercice 2 - Primitives de polynômes

Déterminer une primitive de :

- a)  $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x - 5$
- b)  $g(x) = (x - 1)(x + 2)$

#### Exercice 3 - Inverses et racines

Déterminer une primitive sur  $]0; +\infty[$  de :

- a)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$
- b)  $g(x) = \frac{3}{x}$
- c)  $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
- d)  $k(x) = \frac{1}{x^3}$

#### Exercice 4 - Exponentielle et trigonométrie

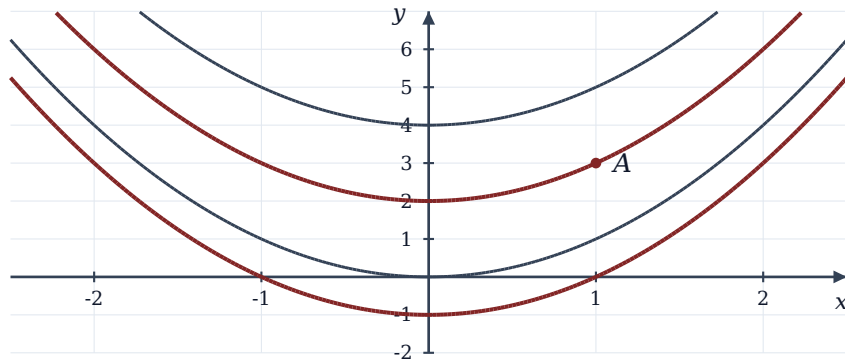
Déterminer une primitive sur  $\mathbb{R}$  de :

- a)  $f(x) = e^x + \cos x$
- b)  $g(x) = 2 \sin x - 3e^x$
- c)  $h(x) = \cos x - \sin x + x$

**Exercice 5 - Une famille de courbes**

On a tracé plusieurs primitives de  $f(x) = 2x$ .

- Donner l'expression de toutes les primitives de  $f$ .
- Déterminer celle dont la courbe passe par le point  $A(1 ; 3)$ .



Quatre primitives de  $f$

**Exercice 6 - Primitive avec condition**

Déterminer la primitive  $F$  de  $f(x) = e^x - 2x$  sur  $\mathbb{R}$  telle que  $F(0) = 3$ .

**Exercice 7 - De la vitesse à la position**

Un objet est lancé vers le bas ; sa vitesse (en m/s) vaut  $v(t) = 9,8t + 2$ , et sa position (distance parcourue, en m) vérifie  $x'(t) = v(t)$  avec  $x(0) = 0$ .

- Déterminer  $x(t)$ .
- Quelle distance a-t-il parcourue au bout de 3 s ?

**Exercice 8 - Du coût marginal au coût total**

Le coût marginal d'une production de  $q$  tonnes est  $C'(q) = 0,3q^2 - 2q + 10$  (en milliers d'euros par tonne). Les coûts fixes s'élèvent à 50 milliers d'euros, c'est-à-dire  $C(0) = 50$ .

- Déterminer le coût total  $C(q)$ .
- Calculer le coût de production de 10 tonnes.

**Exercice 9 - Simplifier avant d'intégrer**

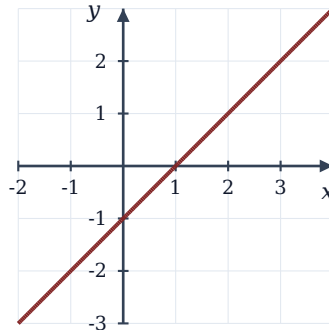
Déterminer une primitive sur  $]0 ; +\infty[$  de :

- $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x}$
- $g(x) = \frac{(x + 1)^2}{x^2}$

**Exercice 10 - Lire les variations d'une primitive**

La droite tracée est la courbe représentative de  $f(x) = x - 1$ . Soit  $F$  la primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  telle que  $F(1) = -2$ .

- Sans calculer  $F$ , déterminer ses variations à partir de la figure.
- Déterminer  $F(x)$  et vérifier.



*Courbe de  $f$  (et non de  $F$ )*

**Exercice 11 - Deux primitives d'une même fonction**

Sur  $] -1 ; +\infty[$ , on pose  $F(x) = \frac{2x-1}{x+1}$  et  $G(x) = -\frac{3}{x+1}$ .

- Calculer  $F(x) - G(x)$ .
- En déduire que  $F$  et  $G$  sont deux primitives d'une même fonction  $f$ , que l'on déterminera.

**Exercice 12 - Confondre dériver et primitiver**

Un élève propose :

- une primitive de  $x^2$  est  $2x$  ;
- une primitive de  $\frac{1}{x^2}$  est  $\ln(x^2)$  ;
- une primitive de  $\cos x$  est  $-\sin x$ .

Corriger chaque proposition en justifiant par une dérivation.

**Exercice 13 - Trouver les coefficients**

Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que  $F(x) = (ax + b)e^{2x}$  soit une primitive de  $f(x) = xe^{2x}$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 14 - Remplir une cuve**

Une cuve contient 10 L d'eau. On ouvre un robinet dont le débit augmente :  $D(t) = 2 + 0,5t$  (en L/min). Le volume vérifie  $V'(t) = D(t)$ .

- Déterminer  $V(t)$ .
- Au bout de combien de temps la cuve contient-elle 100 L ?

**Exercice 15 – Primitive nulle en un point**

Soit  $f(x) = \cos x - \sin x$  sur  $\mathbb{R}$ .

- a) Déterminer la primitive  $F$  de  $f$  qui s'annule en  $\frac{\pi}{4}$ .
- b) Calculer  $F(0)$  et  $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ .