

Plaquette 5 - Problèmes de synthèse : modèles différentiels et conditions initiales

Primitives et équations différentielles — Terminale spé maths

Exercices

Méthode

On reconnaît une **forme composée** pour trouver une primitive, on résout $y' = ay + b$ par **homogène + particulière**, on détermine la constante par la **condition initiale**, et on interprète le modèle (refroidissement, circuit, population).

Exercice 1 - Primitives immédiates

Déterminer une primitive de :

a) $f(x) = 3x^2 - \frac{4}{x}$ sur $]0; +\infty[$

b) $g(x) = 2e^x - \sin x$

c) $h(x) = \frac{1}{x^2}$ sur $]0; +\infty[$

Exercice 2 - Forme u'/u

Déterminer une primitive de $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 3}$ et de $g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

Exercice 3 - Forme $u'e^u$

Déterminer une primitive de $f(x) = xe^{x^2}$ et de $g(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$.

Exercice 4 - Primitive avec condition initiale

Déterminer la primitive F de $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ telle que $F(1) = 5$.

Exercice 5 - Équation $y' = ay$

Résoudre $y' = -3y$ avec $y(0) = 4$, puis déterminer quand y atteint 1.

Exercice 6 - Équation $y' = ay + b$

Résoudre $y' = 2y - 6$ avec $y(0) = 1$, et décrire le comportement.

Exercice 7 - Équation avec équilibre attractif

Résoudre $y' + 4y = 12$ avec $y(0) = 0$, et donner la limite.

Exercice 8 - Loi de Newton (refroidissement)

Un objet à 90 °C est placé dans une pièce à 20 °C. Sa température vérifie $T' = -0,03(T - 20)$ (t en minutes).

- a) Déterminer $T(t)$.
- b) Quand atteint-il $40\text{ }^{\circ}\text{C}$?

Exercice 9 - Circuit RC

Dans un circuit RC, la tension du condensateur vérifie $u' + \frac{u}{\tau} = \frac{E}{\tau}$ avec $\tau = 0,5\text{ s}$, $E = 10\text{ V}$ et $u(0) = 0$.

- a) Déterminer $u(t)$.
- b) Quand atteint-on 90 % de E ?

Exercice 10 - Population avec prélèvement

Une population vérifie $P' = 0,05P - 200$ avec $P(0) = 5\,000$ (individus, t en années). La population survit-elle ?

Exercice 11 - Primitive et aire

Soit $f(x) = 3x^2 + 2$. Déterminer la primitive F nulle en 0, puis l'aire sous la courbe entre 0 et 2.

Exercice 12 - Équation différentielle avec second membre variable

Vérifier que $y_p(x) = x - 1$ est solution de $y' - y = 2 - x$, puis résoudre l'équation.

Exercice 13 - Dissolution d'un médicament

La quantité de médicament dans le sang vérifie $Q' = -0,2Q$ (t en heures), avec $Q(0) = 500\text{ mg}$. On considère le traitement inefficace sous 50 mg. Combien de temps dure l'effet ?

Exercice 14 - Primitive d'une fonction trigonométrique

Déterminer une primitive de $f(x) = \sin x \cos x$ de deux façons.

Exercice 15 - Synthèse : modèle complet

Une cuve contient 1 000 L d'eau pure. On y injecte de la saumure à 3 g/L au débit de 10 L/min, en évacuant 10 L/min de mélange. La masse de sel vérifie $m' = 30 - \frac{m}{100}$ (g, t en minutes).

- a) Résoudre avec $m(0) = 0$.
- b) Déterminer la masse limite et le temps pour atteindre la moitié de cette masse.