Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : modèles différentiels et conditions initiales

Primitives et équations différentielles — Terminale spé maths

Exercices

Méthode

On reconnaît une **forme composée** pour trouver une primitive, on résout $y' = ay + b$ par **homogène + particulière**, on détermine la constante par la **condition initiale**, et on interprète le modèle (refroidissement, circuit, population).

Exercice 1 – Primitives immédiates

Déterminer une primitive de :

a) $f(x) = 3x^2 - \dfrac{4}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$

b) $g(x) = 2\mathrm{e}^x - \sin x$

c) $h(x) = \dfrac{1}{x^2}$ sur $]0\,;+\infty[$

Exercice 2 – Forme u'/u

Déterminer une primitive de $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+3}$ et de $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

Exercice 3 – Forme u'e^u

Déterminer une primitive de $f(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$ et de $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$.

Exercice 4 – Primitive avec condition initiale

Déterminer la primitive F de $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ telle que $F(1) = 5$.

Exercice 5 – Équation y' = ay

Résoudre $y' = -3y$ avec $y(0) = 4$, puis déterminer quand y atteint 1.

Exercice 6 – Équation y' = ay + b

Résoudre $y' = 2y - 6$ avec $y(0) = 1$, et décrire le comportement.

Exercice 7 – Équation avec équilibre attractif

Résoudre $y' + 4y = 12$ avec $y(0) = 0$, et donner la limite.

Exercice 8 – Loi de Newton (refroidissement)

Un objet à 90 °C est placé dans une pièce à 20 °C. Sa température vérifie $T' = -0{,}03(T - 20)$ (t en minutes).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Déterminer $T(t)$.
b) Quand atteint-il 40 °C ?

Exercice 9 – Circuit RC

Dans un circuit RC, la tension du condensateur vérifie $u' + \frac{u}{\tau} = \frac{E}{\tau}$ avec $\tau = 0{,}5$ s, $E = 10$ V et $u(0) = 0$.

a) Déterminer $u(t)$.
b) Quand atteint-on 90 % de E ?

Exercice 10 – Population avec prélèvement

Une population vérifie $P' = 0{,}05P - 200$ avec $P(0) = 5\,000$ (individus, t en années). La population survit-elle ?

Exercice 11 – Primitive et aire

Soit $f(x) = 3x^2 + 2$. Déterminer la primitive F nulle en 0, puis l'aire sous la courbe entre 0 et 2.

Exercice 12 – Équation différentielle avec second membre variable

Vérifier que $y_p(x) = x - 1$ est solution de $y' - y = 2 - x$, puis résoudre l'équation.

Exercice 13 – Dissolution d'un médicament

La quantité de médicament dans le sang vérifie $Q' = -0{,}2Q$ (t en heures), avec $Q(0) = 500$ mg. On considère le traitement inefficace sous 50 mg. Combien de temps dure l'effet ?

Exercice 14 – Primitive d'une fonction trigonométrique

Déterminer une primitive de $f(x) = \sin x \cos x$ de deux façons.

Exercice 15 – Synthèse : modèle complet

Une cuve contient 1 000 L d'eau pure. On y injecte de la saumure à 3 g/L au débit de 10 L/min, en évacuant 10 L/min de mélange. La masse de sel vérifie $m' = 30 - \frac{m}{100}$ (g, t en minutes).

a) Résoudre avec $m(0) = 0$.
b) Déterminer la masse limite et le temps pour atteindre la moitié de cette masse.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).