

Plaquette 3 - Indépendance d'événements

Probabilités conditionnelles et indépendance — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition. A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Caractérisation (si $P(A) \neq 0$) : A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$. Sur un arbre : $P_A(B) = P_{\bar{A}}(B)$.

Complémentaires : si A et B sont indépendants, alors A et $\bar{B}$, $\bar{A}$ et B , $\bar{A}$ et $\bar{B}$ le sont aussi.

Réunion : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$; si A et B sont indépendants, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$.

« **Au moins un** » avec des événements indépendants :

$$P(\text{au moins un}) = 1 - P(\text{aucun}) = 1 - \prod_i (1 - p_i)$$

⚠ **Indépendants** ne veut pas dire **incompatibles** : deux événements incompatibles de probabilités non nulles ne sont jamais indépendants.

Correction de l'exercice 1 - Tester l'indépendance

On compare $P(A \cap B)$ au produit $P(A) \times P(B)$:

$$A \text{ et } B \text{ indépendants} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

a) $0,4 \times 0,25 = 0,1 = P(A \cap B)$: **indépendants**.

b) $0,5 \times 0,2 = 0,1 \neq 0,15$: **non indépendants**.

— **Interprétation de b)** : $P_A(B) = \frac{0,15}{0,5} = 0,3 > P(B) = 0,2$; savoir que A est réalisé **augmente** la probabilité de B .

Réponse. a) Indépendants · b) non ($P_A(B) = 0,3 \neq 0,2$).

Correction de l'exercice 2 - Deux dés

On calcule les trois probabilités (36 issues équiprobables) :

— $P(A) = \frac{1}{2}$ (3 faces paires sur 6) ;

— $P(B) = \frac{1}{2}$: la somme est paire quand les deux dés ont la même parité, soit $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$;

— $A \cap B$: premier dé pair **et** somme paire, c'est-à-dire les deux dés pairs : $\frac{3 \times 3}{36} = \frac{1}{4}$.

$$P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(A \cap B)$$

Les événements sont **indépendants**.

— **Surprenant ?** La somme dépend du premier dé, mais sa **parité** n'est pas influencée par la parité du premier dé : quel que soit celui-ci, le second dé rend la somme paire une fois sur deux.

Réponse. Oui : $P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A)P(B)$.

Correction de l'exercice 3 - Une indépendance fragile

a) $P(R) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$, $P(C) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$, $P(R \cap C) = \frac{1}{32}$ (le roi de cœur).

$$P(R) \times P(C) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32} = P(R \cap C)$$

Indépendants : la proportion de rois est la même parmi les cœurs ($\frac{1}{8}$) que dans tout le jeu.

b) Avec 33 cartes : $P(R) = \frac{4}{33}$, $P(C) = \frac{8}{33}$, $P(R \cap C) = \frac{1}{33}$.

— $P(R) \times P(C) = \frac{32}{1089} \approx 0,0294$ alors que $\frac{1}{33} \approx 0,0303$: **plus indépendants**.

— **Leçon** : l'indépendance est une propriété **numérique** exacte, pas une intuition ; un seul changement dans l'univers peut la détruire.

Réponse. a) Oui · b) non.

Correction de l'exercice 4 - Indépendance et complémentaire

A est la réunion des deux événements incompatibles $A \cap B$ et $A \cap \bar{B}$:

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

— Par indépendance, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, donc

— $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\bar{B})$.

C'est la définition de l'indépendance de A et $\bar{B}$.

— **Conséquence** : en appliquant le résultat deux fois, $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont aussi indépendants.

— **Intuition** : si savoir que B se produit n'apprend rien sur A , savoir que B ne se produit pas n'apprend rien non plus.

Réponse. $P(A \cap \bar{B}) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\bar{B})$.

Correction de l'exercice 5 - Indépendance dans un tableau

On calcule les probabilités à partir des effectifs :

— $P(T) = \frac{80}{200} = 0,4$; $P(V) = \frac{50}{200} = 0,25$; $P(T \cap V) = \frac{20}{200} = 0,1$.

$$P(T) \times P(V) = 0,4 \times 0,25 = 0,1 = P(T \cap V)$$

T et V sont **indépendants**.

— **Autre lecture** : la proportion de cyclistes est la même chez les télétravailleurs ($\frac{20}{80} = 25\%$) et chez les autres ($\frac{30}{120} = 25\%$).

— **Méthode** : dans un tableau, l'indépendance se voit à la **proportionnalité** des lignes : (20 ; 60) et (30 ; 90) sont proportionnelles.

Réponse. Indépendants ($0,4 \times 0,25 = 0,1$).

Correction de l'exercice 6 - Inclusion et indépendance

Si $A \subset B$, alors $A \cap B = A$, donc $P(A \cap B) = P(A)$.

Supposons A et B indépendants :

$$P(A) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

— En divisant par $P(A) \neq 0$: $P(B) = 1$, ce qui contredit $P(B) < 1$.

Donc A et B **ne sont pas** indépendants.

— **Intuition** : savoir que A est réalisé **garantit** que B l'est ($P_A(B) = 1$) ; l'information est totale, le contraire de l'indépendance.

— **Exemple** : « obtenir 6 » et « obtenir un nombre pair » avec un dé.

Réponse. L'indépendance imposerait $P(B) = 1$: impossible.

Correction de l'exercice 7 - Calculer grâce à l'indépendance

a) Par indépendance : $P(A \cap B) = 0,3 \times 0,5 = 0,15$. Puis

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,3 + 0,5 - 0,15 = 0,65$$

b) **Première façon** : $\bar{A} \cap \bar{B}$ est le contraire de $A \cup B$, donc $P = 1 - 0,65 = 0,35$.

Seconde façon : $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants, donc $P = 0,7 \times 0,5 = 0,35$ ✓

— **Piège** : additionner $0,3 + 0,5 = 0,8$ pour $P(A \cup B)$, en oubliant de retirer l'intersection comptée deux fois.

Réponse. a) 0,15 et 0,65 · b) 0,35.

Correction de l'exercice 8 - Trois alarmes indépendantes

a) Par indépendance, on multiplie :

$$P(\text{trois pannes}) = 0,1^3 = 0,001$$

b) « Au moins une fonctionne » est le contraire de « toutes en panne » :

— $1 - 0,001 = 0,999$.

c) Avec n alarmes : $1 - 0,1^n \geq 0,99999 \Leftrightarrow 0,1^n \leq 10^{-5} \Leftrightarrow n \geq 5$.

— **Principe de redondance** : chaque alarme ajoutée divise par 10 le risque que toutes échouent ensemble — à condition que les pannes soient réellement **indépendantes** (pas de coupure de courant commune, par exemple).

Réponse. a) 0,001 · b) 0,999 · c) 5 alarmes.

Correction de l'exercice 9 - Deux archers

L'indépendance se lit sur l'arbre : les branches du second niveau portent les **mêmes** probabilités après A_1 et après $\bar{A}_1$.

a) **Complémentaire** : la cible est manquée si les deux ratent,

$$P(\text{atteinte}) = 1 - 0,3 \times 0,4 = 1 - 0,12 = 0,88$$

b) Deux chemins :

— $P(A_1 \cap \bar{A}_2) + P(\bar{A}_1 \cap A_2) = 0,7 \times 0,4 + 0,3 \times 0,6 = 0,28 + 0,18 = 0,46$.

— **Contrôle** : deux touches 0,42, une touche 0,46, aucune 0,12 ; total 1 ✓

Réponse. a) 0,88 · b) 0,46.

Correction de l'exercice 10 - Reconnaître l'indépendance sur un arbre

a) **Probabilités totales** :

$$P(B) = 0,6 \times 0,3 + 0,4 \times 0,3 = 0,3 \times (0,6 + 0,4) = 0,3$$

b) $P_A(B) = 0,3 = P(B)$: la réalisation de A ne change pas la probabilité de B , donc A et B sont **indépendants**.

— **Vérification** par la définition : $P(A \cap B) = 0,18 = 0,6 \times 0,3 = P(A)P(B)$ ✓

— **Règle** : sur un arbre, A et B sont indépendants exactement quand $P_A(B) = P_{\bar{A}}(B)$ — les deux sous-arbres sont identiques.

Réponse. a) $0,3$ · b) $P_A(B) = P(B) = 0,3$.

Correction de l'exercice 11 - Avec ou sans remise

a) Avec remise, la composition de l'urne est la même au second tirage :

$P_{R_1}(R_2) = \frac{3}{5} = P(R_2)$. Les événements sont **indépendants**.

b) Sans remise :

— $P(R_1) = \frac{3}{5}$;

— $P(R_2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20} + \frac{6}{20} = \frac{3}{5}$;

— $P(R_1 \cap R_2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$.

$$P(R_1) \times P(R_2) = \frac{9}{25} = 0,36 \neq 0,3 = P(R_1 \cap R_2)$$

Non indépendants : tirer une rouge d'abord rend la seconde rouge moins probable ($\frac{2}{4}$ au lieu de $\frac{3}{5}$).

— **Remarque** : $P(R_2) = P(R_1)$ ne suffit pas à conclure à l'indépendance.

Réponse. a) Indépendants · b) non : $0,3 \neq 0,36$.

Correction de l'exercice 12 - Trouver la probabilité manquante

a) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ donne $0,2 = 0,5 \times P(B)$, donc $P(B) = 0,4$.

b) On note $p = P(B)$. Formule de la réunion avec l'indépendance :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

— $0,65 = 0,3 + p - 0,3p = 0,3 + 0,7p$.

— $0,7p = 0,35$, donc $p = 0,5$.

— **Vérification de b)** : $0,3 + 0,5 - 0,15 = 0,65$ ✓

— **Autre méthode pour b)** : $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0,65 = 0,35 = 0,7 \times (1 - p)$, d'où $1 - p = 0,5$.

Réponse. a) $0,4$ · b) $0,5$.

Correction de l'exercice 13 - Groupes sanguins

On note O et R les deux événements, indépendants.

a) Calcul :

$$P(O \cap R) = 0,42 \times 0,85 = 0,357$$

soit environ 35,7 %.

b) $\bar{O}$ et $\bar{R}$ sont aussi indépendants : $0,58 \times 0,15 = 0,087$, soit 8,7 %.

c) $P(O \cup R) = 1 - P(\bar{O} \cap \bar{R}) = 1 - 0,087 = 0,913$.

— **Contrôle** : $0,42 + 0,85 - 0,357 = 0,913$ ✓

- **Culture** : les donneurs O négatif ($0,42 \times 0,15 \approx 6\%$) sont les « donneurs universels » pour les globules rouges.

Réponse. a) $0,357$ · b) $0,087$ · c) $0,913$.

Correction de l'exercice 14 - Le problème du chevalier de Méré

Les lancers sont **indépendants** ; on passe par le complémentaire, « aucun succès ».

Jeu 1 : à chaque lancer, pas de 6 avec la probabilité $\frac{5}{6}$.

$$P_1 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296} \approx 0,518$$

Jeu 2 : à chaque lancer des deux dés, pas de double 6 avec la probabilité $\frac{35}{36}$.

$$P_2 = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 1 - 0,509 = 0,491.$$

Le jeu 1 est **favorable** ($> 0,5$), le jeu 2 **défavorable** ($< 0,5$).

- **Histoire** : Méré pensait les deux jeux équivalents ($4 \times \frac{1}{6} = 24 \times \frac{1}{36}$) ; il posa la question à Pascal, et cet échange est souvent présenté comme la naissance du calcul des probabilités.

Réponse. $P_1 \approx 0,518$ (favorable), $P_2 \approx 0,491$ (défavorable).

Correction de l'exercice 15 - Indépendance approximative

a) $P(T) = 0,3$, $P(V) = 0,2$, $P(T \cap V) = 0,062$.

$$P(T) \times P(V) = 0,06 \neq 0,062$$

Mathématiquement, les événements **ne sont pas** indépendants.

b) $P_T(V) = \frac{62}{300} \approx 0,207$, contre $P(V) = 0,2$.

- L'écart est **très faible** : parmi les télétravailleurs, la proportion de cyclistes n'est que très légèrement plus élevée.
- **Interprétation** : sur un échantillon, les fréquences fluctuent ; un écart aussi petit est compatible avec une indépendance « dans la population ». En statistique, on ne conclut à une dépendance que si l'écart dépasse les fluctuations d'échantillonnage.

Réponse. a) $0,06 \neq 0,062$: pas exactement indépendants · b) $0,207$ contre $0,2$: quasi-indépendance.