

Plaquette 1 - Probabilités conditionnelles et arbres

Probabilités conditionnelles et indépendance — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Probabilité conditionnelle. Si $P(A) \neq 0$:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{d'où} \quad P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

Dans un tableau d'effectifs : $P_A(B) = \frac{\text{effectif de } A \cap B}{\text{effectif de } A}$ — on divise par le total de A, pas par l'effectif total.

Arbre pondéré :

- la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1 ;
- les branches du second niveau portent des probabilités **conditionnelles** ($P_A(B)$, $P_{\bar{A}}(B)$...) ;
- la probabilité d'un chemin est le **produit** des probabilités de ses branches ;
- la somme des probabilités de toutes les feuilles vaut 1.

Complémentaire : $P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$.

Attention : en général $P_A(B) \neq P_B(A)$.

Correction de l'exercice 1 - Appliquer la définition

a) On applique la définition, en divisant par la probabilité de l'événement **connu** :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,2}{0,5} = 0,4 \quad P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,2}{0,25} = 0,8$$

b) Sachant A, les événements B et $\bar{B}$ sont complémentaires :

- $P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B) = 0,6$.
- **Remarque** : $P_A(B) = 0,4$ et $P_B(A) = 0,8$ sont très différentes. Le dénominateur change selon l'information dont on dispose.

Réponse. a) $P_A(B) = 0,4$, $P_B(A) = 0,8$ · b) 0,6.

Correction de l'exercice 2 - Lire dans un tableau

On divise par le total de la **ligne ou colonne** de l'événement connu :

$$P_A(B) = \frac{\text{effectif de } A \cap B}{\text{effectif de } A}$$

- $P(F) = \frac{200}{500} = 0,4$;
- $P_L(F) = \frac{120}{300} = 0,4$ (parmi les 300 acheteurs en ligne) ;
- $P_F(L) = \frac{120}{200} = 0,6$ (parmi les 200 porteurs de carte).
- **Observation** : $P_L(F) = P(F)$: savoir qu'un client achète en ligne ne change pas la probabilité qu'il ait une carte. On dira que L et F sont **indépendants**.
- **Piège** : calculer $\frac{120}{500}$, qui est $P(L \cap F)$, et non une probabilité conditionnelle.

Réponse. $P(F) = 0,4$, $P_L(F) = 0,4$, $P_F(L) = 0,6$.

Correction de l'exercice 3 - Lire un arbre pondéré

a) Premier niveau : $P(A) = 0,3$. Second niveau (probabilités **conditionnelles**) : $P_A(B) = 0,6$ et $P_{\bar{A}}(B) = 0,2$.

b) On **multiplie** le long du chemin :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0,3 \times 0,6 = 0,18$$

$$- P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,7 \times 0,8 = 0,56.$$

c) Les deux autres chemins : $P(A \cap \bar{B}) = 0,3 \times 0,4 = 0,12$ et $P(\bar{A} \cap B) = 0,7 \times 0,2 = 0,14$.

$$- \text{Somme : } 0,18 + 0,12 + 0,14 + 0,56 = 1 \quad \checkmark$$

Réponse. a) 0,3 ; 0,6 ; 0,2 · b) 0,18 et 0,56 · c) somme 1.

Correction de l'exercice 4 - Compléter un arbre

— **Premier niveau** : $P(\bar{A}) = 1 - 0,4 = 0,6$.

— **Branches issues de A** : $P_A(B) = 0,75$ et $P_A(\bar{B}) = 0,25$.

— **Branches issues de $\bar{A}$** : on utilise la formule des probabilités composées à l'envers,

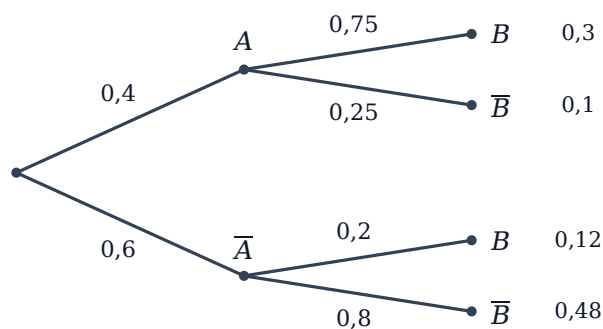
$$P_{\bar{A}}(B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})} = \frac{0,12}{0,6} = 0,2$$

donc $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,8$.

Chemins : $0,4 \times 0,75 = 0,3$; $0,4 \times 0,25 = 0,1$; 0,12 (donné) ; $0,6 \times 0,8 = 0,48$.

— **Contrôle** : $0,3 + 0,1 + 0,12 + 0,48 = 1 \quad \checkmark$

Réponse. $P_{\bar{A}}(B) = 0,2$; chemins 0,3, 0,1, 0,12, 0,48.



Arbre complété et probabilités des chemins

Correction de l'exercice 5 - Deux tirages sans remise

a) Au second tirage, il ne reste que 5 boules, dont la composition dépend du premier tirage (voir l'arbre).

b) On multiplie le long du chemin $R_1 R_2$:

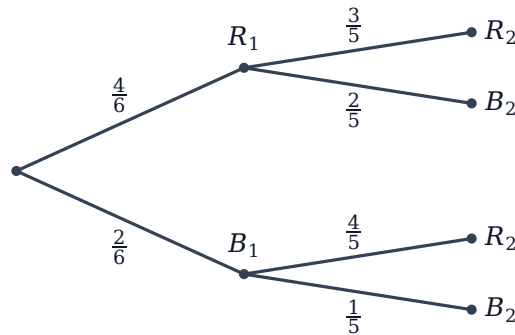
$$P(R_1 \cap R_2) = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

c) Deux chemins mènent à R_2 :

$$- P(R_2) = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{30} + \frac{8}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}.$$

- **Commentaire** : c'est la même probabilité qu'au premier tirage ($\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$) ! Sans information sur la première boule, la seconde a la même chance d'être rouge — par symétrie, l'ordre des tirages ne compte pas.

Réponse. b) $\frac{2}{5}$ · c) $\frac{2}{3}$, comme au premier tirage.



Deux tirages sans remise

Correction de l'exercice 6 - Pluie et retards

a) Premier niveau : P (0,3) et $\bar{P}$ (0,7). Second niveau : $P_P(R) = 0,5$ et $P_{\bar{P}}(R) = 0,1$.

b) **Probabilités composées** :

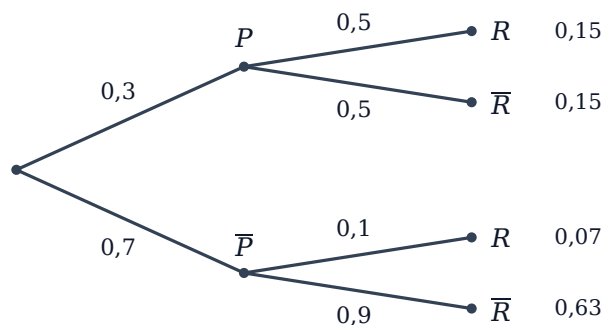
$$P(P \cap R) = P(P) \times P_P(R) = 0,3 \times 0,5 = 0,15$$

c) $P(\bar{P} \cap \bar{R}) = 0,7 \times 0,9 = 0,63$.

— **Lecture** : dans 63 % des jours, il fait sec et le bus est à l'heure ; dans 15 %, il pleut **et** il est en retard.

— **Piège** : 0,5 n'est pas « la probabilité qu'il pleuve et que le bus soit en retard », c'est $P_P(R)$: la probabilité du retard **parmi** les jours de pluie.

Réponse. b) 0,15 · c) 0,63.



Météo et retard du bus

Correction de l'exercice 7 - Bien lire l'énoncé

On repère la **population de référence** (ce qui suit « des ») : c'est l'événement par lequel on conditionne.

$P_A(B)$:proportion de B parmi A $P(A \cap B)$:proportion de « A et B » parmi tous

- a) Parmi les filles : $P_F(L) = 0,3$.
 b) Parmi tous les élèves : $P(F \cap L) = 0,3$.
 c) Parmi les latinistes : $P_L(F) = 0,3$.

— **Enjeu** : ces trois phrases décrivent des situations très différentes. Si le lycée compte 50 % de filles, a) donne $P(F \cap L) = 0,5 \times 0,3 = 0,15$, deux fois moins que b).

Réponse. a) $P_F(L)$ · b) $P(F \cap L)$ · c) $P_L(F)$.

Correction de l'exercice 8 - Un arbre à trois branches

a) Chaque chemin se calcule par **produit** :

$$P(A \cap E) = 0,5 \times 0,2 = 0,1$$

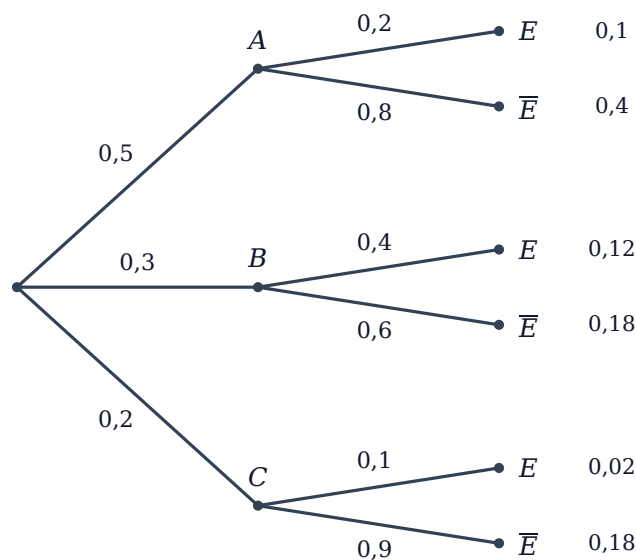
— $P(A \cap \bar{E}) = 0,4$; $P(B \cap E) = 0,12$; $P(B \cap \bar{E}) = 0,18$; $P(C \cap E) = 0,02$; $P(C \cap \bar{E}) = 0,18$.

— **Contrôle** : la somme vaut $0,1 + 0,4 + 0,12 + 0,18 + 0,02 + 0,18 = 1$ ✓

b) $P(B \cap \bar{E}) = 0,3 \times 0,6 = 0,18$.

— **Remarque** : en additionnant les chemins qui finissent par E , on obtiendrait $P(E) = 0,24$ — c'est la formule des probabilités totales, étudiée ensuite.

Réponse. b) 0,18.



Trois itinéraires

Correction de l'exercice 9 - Deux conditionnelles complémentaires

a) $A \cap B$ et $A \cap \bar{B}$ sont **incompatibles** et leur réunion est A , donc

$$P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(A)$$

— En divisant par $P(A) \neq 0$: $\frac{P(A \cap B)}{P(A)} + \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A)} = 1$, c'est-à-dire $P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$.

b) Les branches issues du nœud A portent $P_A(B)$ et $P_A(\bar{B})$; leur somme vaut 1 d'après a).

— **Interprétation** : P_A est une **probabilité** à part entière (sur l'univers réduit à A) ; elle vérifie toutes les règles habituelles, dont celle du complémentaire.

Réponse. $P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(A)$, puis on divise par $P(A)$.

Correction de l'exercice 10 - Dans un jeu de cartes

En situation d'**équiprobabilité**, conditionner revient à compter dans l'univers réduit :

$$P_A(B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)}$$

a) Il y a 12 figures, dont 4 rois : $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

b) Parmi les 4 rois, un seul est un cœur : $\frac{1}{4}$.

c) Parmi les 8 cœurs, un seul est un roi : $\frac{1}{8}$.

— **Comparaison** : b) et c) portent sur le même événement « roi de cœur », mais l'univers réduit n'est pas le même (4 rois ou 8 cœurs).

Réponse. a) $\frac{1}{3}$ · b) $\frac{1}{4}$ · c) $\frac{1}{8}$.

Correction de l'exercice 11 - Avec un dé

On réduit l'univers aux issues de l'événement connu, qui restent **équiprobables** :

$$P_A(B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)}$$

a) Résultats pairs : $\{2; 4; 6\}$; un seul vaut 6 : $\frac{1}{3}$.

b) Résultats au moins 4 : $\{4; 5; 6\}$; deux sont pairs : $\frac{2}{3}$.

c) $P(\text{pair}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

— **Comparaison** : l'information « au moins 4 » fait passer la probabilité d'être pair de $\frac{1}{2}$ à $\frac{2}{3}$: elle n'est pas neutre. Les événements « pair » et « au moins 4 » ne sont **pas indépendants**.

Réponse. a) $\frac{1}{3}$ · b) $\frac{2}{3}$ · c) $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 12 - Un recrutement en deux étapes

a) L'arbre n'est pas « complet » : après un échec au premier entretien, il n'y a pas de second entretien. La branche $\overline{E}_1$ s'arrête.

b) **Embauche** : chemin E_1 puis E_2 ,

$$P(E_1 \cap E_2) = 0,6 \times 0,5 = 0,3$$

— **Échec au second entretien** : $P(E_1 \cap \overline{E}_2) = 0,6 \times 0,5 = 0,3$.

— **Échec au premier** : 0,4.

— **Contrôle** : $0,3 + 0,3 + 0,4 = 1$ ✓

— **Remarque** : 0,5 est une probabilité **conditionnelle** ; la probabilité de réussir le second entretien « tout court » n'a de sens que pour ceux qui le passent.

Réponse. b) Embauche 0,3 ; échec au second entretien 0,3.

Correction de l'exercice 13 - Retourner une probabilité conditionnelle

On calcule d'abord l'intersection, **symétrique** en A et B , de deux façons :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$$

- $P(A \cap B) = 0,2 \times 0,5 = 0,1$.
- $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,1}{0,4} = 0,25$.
- **Méthode** : pour passer de $P_A(B)$ à $P_B(A)$, on transite toujours par $P(A \cap B)$. C'est l'idée de la **formule de Bayes**.
- **Contrôle** : $0,25 \neq 0,5$; les deux probabilités conditionnelles n'ont aucune raison d'être égales.

Réponse. $P_B(A) = 0,25$.

Correction de l'exercice 14 - Une enquête électorale

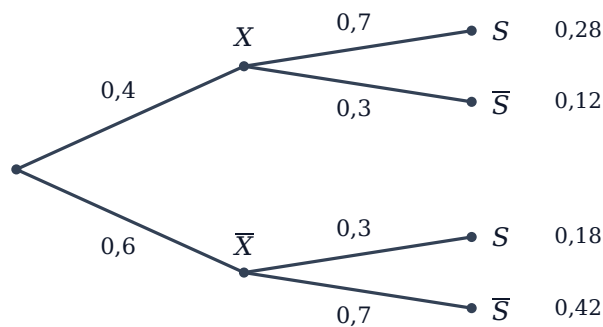
a) Premier niveau : $P(X) = 0,4$, $P(\bar{X}) = 0,6$. Second niveau : $P_X(S) = 0,7$ et $P_{\bar{X}}(S) = 0,3$.

b) **Produits le long des chemins** :

$$P(X \cap S) = 0,4 \times 0,7 = 0,28 \quad P(\bar{X} \cap S) = 0,6 \times 0,3 = 0,18$$

- **Interprétation** : 28 % des électeurs sont des plus de 50 ans votant pour X, et 18 % des plus de 50 ans votant pour un autre candidat.
- Au total, $0,28 + 0,18 = 46$ % des électeurs ont plus de 50 ans.

Réponse. $P(X \cap S) = 0,28$; $P(\bar{X} \cap S) = 0,18$.



Vote et âge

Correction de l'exercice 15 - Deux dés et une somme connue

Les 36 couples de résultats sont équiprobables. On **réduit l'univers** aux couples de somme 8 :

$$(2; 6), (3; 5), (4; 4), (5; 3), (6; 2)$$

soit 5 issues, encore équiprobables.

a) Deux de ces couples contiennent un 6 : $P_{S=8}(\text{un } 6) = \frac{2}{5}$.

b) Un seul est un double, $(4; 4)$: $\frac{1}{5}$.

- **Comparaison** : sans information, la probabilité de faire un double vaut $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$; savoir que la somme vaut 8 la fait passer à $\frac{1}{5}$.
- **Piège** : compter $(2; 6)$ et $(6; 2)$ comme une seule issue — ce sont deux résultats distincts des deux dés.

Réponse. a) $\frac{2}{5}$ · b) $\frac{1}{5}$.