

Plaquette 2 - Probabilités totales et Bayes

Probabilités conditionnelles et indépendance — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Partition. Des événements $A_1, \dots, A_n$ de probabilités non nulles forment une partition de l'univers s'ils sont deux à deux incompatibles et de réunion l'univers (par exemple A et $\bar{A}$).

Formule des probabilités totales :

$$P(B) = \sum_i P(A_i \cap B) = \sum_i P(A_i) P_{A_i}(B)$$

Avec la partition $\langle A, \bar{A} \rangle$:

$$P(B) = P(A) P_A(B) + P(\bar{A}) P_{\bar{A}}(B)$$

Sur l'arbre : on **additionne** les probabilités de tous les chemins qui aboutissent à B .

Formule de Bayes (retourner le conditionnement) :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) P_A(B)}{P(B)}$$

Piège classique : confondre $P_A(B)$ (« la probabilité d'un indice quand on est coupable ») et $P_B(A)$ (« la probabilité d'être coupable quand on a l'indice »).

Correction de l'exercice 1 - Une probabilité totale

P et $\bar{P}$ forment une **partition** de l'univers. Deux chemins mènent à R :

$$P(R) = P(P) P_P(R) + P(\bar{P}) P_{\bar{P}}(R)$$

$$— P(R) = 0,3 \times 0,5 + 0,7 \times 0,1 = 0,15 + 0,07 = 0,22.$$

Le bus est en retard dans 22 % des cas.

— **Contrôle** : $P(R)$ est bien entre 0,1 et 0,5, les deux probabilités conditionnelles ; c'est une **moyenne pondérée** de celles-ci, avec les poids 0,3 et 0,7.

Réponse. $P(R) = 0,22$.

Correction de l'exercice 2 - Remonter à la cause

On cherche $P_R(P)$: on connaît l'effet (le retard), on remonte à la cause. **Formule de Bayes** :

$$P_R(P) = \frac{P(P \cap R)}{P(R)} = \frac{0,3 \times 0,5}{0,22} = \frac{0,15}{0,22} = \frac{15}{22} \approx 0,68$$

— Sachant que le bus est en retard, il a plu dans environ 68 % des cas, contre 30 % sans information.

— **Interprétation** : le retard est un **indice** de pluie ; il fait plus que doubler la probabilité qu'il ait plu.

— **Piège** : répondre 0,5, qui est $P_P(R)$ (la probabilité de retard quand il pleut), et non $P_R(P)$.

Réponse. $P_R(P) = \frac{15}{22} \approx 0,68$.

Correction de l'exercice 3 - Trois moyens de transport

a) La partition compte **trois** événements ; on additionne les trois chemins menant à R :

$$P(R) = 0,2 \times 0,05 + 0,5 \times 0,2 + 0,3 \times 0,1 = 0,01 + 0,1 + 0,03 = 0,14$$

b) **Bayes** :

$$- P_R(\text{bus}) = \frac{0,1}{0,14} = \frac{5}{7} \approx 0,71 ;$$

$$- P_R(\text{pied}) = \frac{0,01}{0,14} = \frac{1}{14} \approx 0,07.$$

— **Interprétation** : le bus ne représente que la moitié des trajets, mais plus de 70 % des retards.

$$- \text{Contrôle} : P_R(\text{vélo}) = \frac{0,03}{0,14} = \frac{3}{14}, \text{ et } \frac{10 + 1 + 3}{14} = 1 \checkmark$$

Réponse. a) 0,14 · b) $\frac{5}{7} \approx 0,71$ (bus) ; $\frac{1}{14} \approx 0,07$ (pied).

Correction de l'exercice 4 - Le filtre anti-spam

a) **Probabilités totales** :

$$P(F) = 0,4 \times 0,95 + 0,6 \times 0,02 = 0,38 + 0,012 = 0,392$$

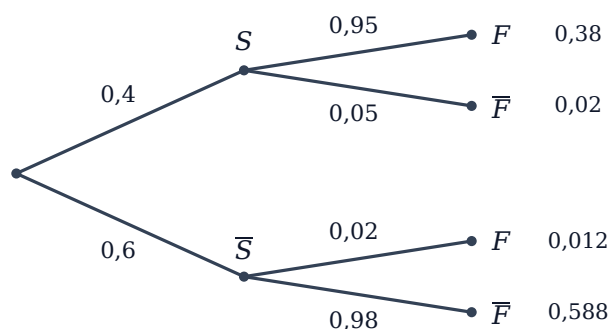
b) **Bayes** : $P_F(S) = \frac{0,38}{0,392} \approx 0,969$.

c) $P(\bar{F}) = 1 - 0,392 = 0,608$ et $P(S \cap \bar{F}) = 0,4 \times 0,05 = 0,02$, donc

$$- P_{\bar{F}}(S) = \frac{0,02}{0,608} \approx 0,033.$$

— **Bilan** : un message signalé est un spam dans 97 % des cas ; un message non signalé est un spam dans seulement 3 % des cas. Le filtre est efficace parce que les spams sont **fréquents** (40 %) ; pour une situation rare, les conclusions seraient bien moins bonnes.

Réponse. a) 0,392 · b) $\approx 0,969$ · c) $\approx 0,033$.



Spam et signalement

Correction de l'exercice 5 - Retourner un arbre

Premier niveau : probabilités totales,

$$P(B) = 0,3 \times 0,6 + 0,7 \times 0,2 = 0,18 + 0,14 = 0,32 \quad P(\bar{B}) = 0,68$$

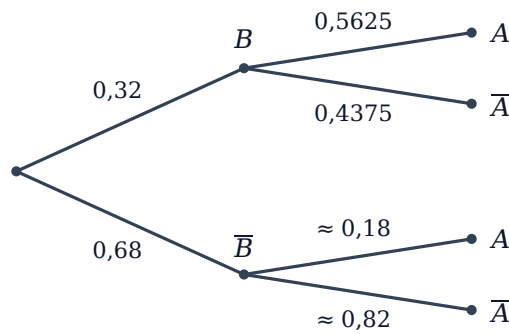
Second niveau : Bayes, avec les intersections $P(A \cap B) = 0,18$, $P(\bar{A} \cap B) = 0,14$,
 $P(A \cap \bar{B}) = 0,12$, $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,56$:

— $P_B(A) = \frac{0,18}{0,32} = 0,5625$ et $P_B(\bar{A}) = 0,4375$;

— $P_{\bar{B}}(A) = \frac{0,12}{0,68} \approx 0,18$ et $P_{\bar{B}}(\bar{A}) = \frac{0,56}{0,68} \approx 0,82$.

— **Contrôle** : les chemins de l'arbre inversé redonnent les mêmes intersections, par exemple $0,32 \times 0,5625 = 0,18$ ✓

Réponse. $P(B) = 0,32$; $P_B(A) = 0,5625$; $P_{\bar{B}}(A) \approx 0,18$.



L'arbre inversé

Correction de l'exercice 6 - Le problème de Monty Hall

On étudie les trois cas (partition), chacun de probabilité $\frac{1}{3}$:

- **Voiture derrière la porte 1** : l'animateur ouvre 2 ou 3 ; en changeant, le joueur **perd**.
- **Voiture derrière la porte 2** : l'animateur est **obligé** d'ouvrir la 3 ; en changeant, le joueur prend la 2 et **gagne**.
- **Voiture derrière la porte 3** : l'animateur ouvre la 2 ; en changeant, le joueur **gagne**.

Par la formule des probabilités totales :

$$P(\text{gagner en changeant}) = \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$$

- En gardant sa porte, il ne gagne qu'avec la probabilité $\frac{1}{3}$.
- **Pourquoi ?** L'animateur donne une information : il n'ouvre jamais la porte gagnante. Changer, c'est parier que le premier choix était mauvais — ce qui arrive deux fois sur trois.

Réponse. $\frac{2}{3}$ en changeant (contre $\frac{1}{3}$ en gardant).

Correction de l'exercice 7 - Retrouver une probabilité inconnue

On pose $x = P(A)$, donc $P(\bar{A}) = 1 - x$. **Probabilités totales** :

$$P(B) = x \times 0,8 + (1 - x) \times 0,3$$

— $0,5 = 0,8x + 0,3 - 0,3x = 0,5x + 0,3$.

— $0,5x = 0,2$, donc $x = 0,4$.

$P(A) = 0,4$.

- **Vérification** : $0,4 \times 0,8 + 0,6 \times 0,3 = 0,32 + 0,18 = 0,5$ ✓
- **Méthode** : la formule des probabilités totales devient une **équation** dont l'inconnue est l'une des probabilités.

Réponse. $P(A) = 0,4$.

Correction de l'exercice 8 - Une urne choisie par un dé

a) **Probabilités totales** :

$$P(R) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{5} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{30} + \frac{5}{30} = \frac{7}{30} \approx 0,233$$

b) **Bayes** :

$$P_R(U_1) = \frac{P(U_1 \cap R)}{P(R)} = \frac{2/30}{7/30} = \frac{2}{7} \approx 0,29.$$

- **Interprétation** : l'urne U_1 n'est choisie qu'une fois sur six (≈ 17 %), mais comme elle contient proportionnellement plus de rouges, tirer une rouge fait monter sa probabilité à 29 %.

Réponse. a) $\frac{7}{30}$ · b) $\frac{2}{7}$.

Correction de l'exercice 9 - Deviner ou savoir ?

On note C « il connaît la réponse » et J « la réponse est juste ». Donc $P_C(J) = 1$ et $P_{\bar{C}}(J) = \frac{1}{4}$.

a) **Probabilités totales** :

$$P(J) = 0,6 \times 1 + 0,4 \times \frac{1}{4} = 0,6 + 0,1 = 0,7$$

b) **Bayes** :

$$P_J(C) = \frac{0,6}{0,7} = \frac{6}{7} \approx 0,857.$$

- **Interprétation** : même une bonne réponse n'est pas une preuve certaine de connaissance ; dans environ 14 % des cas, elle est due au hasard.
- **Remarque** : c'est pour corriger cet effet que certains QCM retirent des points aux mauvaises réponses.

Réponse. a) $0,7$ · b) $\frac{6}{7} \approx 0,86$.

Correction de l'exercice 10 - Sport et filles

On note F « fille » et S « pratique un sport en club ». Les données sont $P(F) = 0,55$, $P_F(S) = 0,4$, $P_{\bar{F}}(S) = 0,3$.

— **Probabilités totales** :

$$P(S) = 0,55 \times 0,4 + 0,45 \times 0,3 = 0,22 + 0,135 = 0,355$$

$$P_S(F) = \frac{0,22}{0,355} = \frac{44}{71} \approx 0,62.$$

Parmi les sportifs, environ 62 % sont des filles.

- **Cohérence** : c'est plus que la proportion de filles dans le lycée (55 %), puisqu'elles pratiquent davantage le sport en club.

Réponse. $P_S(F) = \frac{44}{71} \approx 0,62$.

Correction de l'exercice 11 - Deux tests valent mieux qu'un

On note M « malade ».

a) **Un test** : $P(+) = 0,1 \times 0,9 + 0,9 \times 0,2 = 0,09 + 0,18 = 0,27$, donc

$$P_+(M) = \frac{0,09}{0,27} = \frac{1}{3} \approx 0,33$$

b) **Deux tests** : sachant l'état, les tests sont indépendants, donc $P_M(++) = 0,9^2 = 0,81$ et $P_{\bar{M}}(++) = 0,2^2 = 0,04$.

— $P(++) = 0,1 \times 0,81 + 0,9 \times 0,04 = 0,081 + 0,036 = 0,117$.

— $P_{++}(M) = \frac{0,081}{0,117} = \frac{9}{13} \approx 0,69$.

— **Interprétation** : un seul test positif laisse deux chances sur trois d'être sain ; un second test positif fait passer la probabilité d'être malade à près de 70 %. C'est pourquoi on **confirme** toujours un dépistage.

Réponse. a) $\frac{1}{3}$ · b) $\frac{9}{13} \approx 0,69$.

Correction de l'exercice 12 - L'erreur du procureur

On note C « coupable » et A « ADN correspondant ». $P(C) = \frac{1}{100\,000}$, $P_C(A) = 1$,
 $P_{\bar{C}}(A) = \frac{1}{10\,000}$.

Probabilités totales :

$$P(A) = \frac{1}{100\,000} \times 1 + \frac{99\,999}{100\,000} \times \frac{1}{10\,000} \approx \frac{1}{100\,000} (1 + 10)$$

(environ 10 innocents de la ville ont le même ADN).

Bayes :

— $P_A(C) = \frac{1/100\,000}{11/100\,000} \approx \frac{1}{11} \approx 0,09$.

— **L'erreur** : le procureur confond $P_{\bar{C}}(A)$ (faible) avec $P_A(\bar{C})$ ($\approx 91\%$). L'ADN seul ne suffit pas ; il faut d'autres éléments pour distinguer le coupable des dix autres personnes compatibles.

Réponse. $P_A(C) \approx \frac{1}{11} \approx 9\%$, et non 99,99 %.

Correction de l'exercice 13 - À partir de quelle proportion ?

a) **Probabilités totales**, puis **Bayes** :

$$P(B) = 0,9p + 0,1(1 - p) = 0,8p + 0,1 \quad P_B(A) = \frac{0,9p}{0,8p + 0,1}$$

b) Le dénominateur étant positif :

— $\frac{0,9p}{0,8p + 0,1} \geq 0,5 \Leftrightarrow 0,9p \geq 0,4p + 0,05 \Leftrightarrow 0,5p \geq 0,05 \Leftrightarrow p \geq 0,1$.

— **Interprétation** : l'indice ne rend A « plus probable qu'improbable » que si A concerne au moins 10 % des cas au départ. Pour un événement rare, même un indice fiable à 90 % laisse A minoritaire.

— **Contrôle** : $p = 0,1$ donne $\frac{0,09}{0,18} = 0,5 \checkmark$

Réponse. a) $P_B(A) = \frac{0,9p}{0,8p + 0,1}$ · b) $p \geq 0,1$.

Correction de l'exercice 14 - Un message binaire bruité

a) Deux chemins mènent à « reçu 1 » :

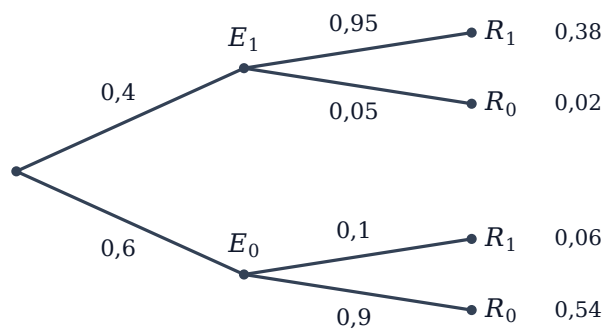
$$P(\text{reçu 1}) = 0,4 \times 0,95 + 0,6 \times 0,1 = 0,38 + 0,06 = 0,44$$

b) **Bayes** :

— $P_{\text{reçu 1}}(\text{envoi 1}) = \frac{0,38}{0,44} = \frac{19}{22} \approx 0,86$.

— **Interprétation** : un 1 reçu est erroné dans environ 14 % des cas. Pour fiabiliser la transmission, on ajoute des bits de contrôle (codes correcteurs d'erreurs).

Réponse. a) $0,44$ · b) $\frac{19}{22} \approx 0,86$.



E_k : on envoie k ; R_k : on reçoit k

Correction de l'exercice 15 - Conducteurs à risque

On note R « à risque » et A « accident ».

a) **Probabilités totales** :

$$P(A) = 0,2 \times 0,3 + 0,8 \times 0,05 = 0,06 + 0,04 = 0,1$$

10 % des clients ont un accident dans l'année.

b) **Bayes** :

— $P_A(R) = \frac{0,06}{0,1} = 0,6$.

— **Interprétation** : les clients à risque ne sont que 20 % du portefeuille, mais 60 % des sinistres. C'est ce qui justifie des primes différentes.

— **Contrôle** : $P_A(\bar{R}) = \frac{0,04}{0,1} = 0,4$ et $0,6 + 0,4 = 1 \checkmark$

Réponse. a) 10 % · b) 0,6.