

Plaquette 4 - Répétitions indépendantes — type bac

Probabilités conditionnelles et indépendance — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Succession d'épreuves indépendantes. La probabilité d'une liste de résultats $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ est

$$P(r_1, r_2, \dots, r_n) = P(r_1) \times P(r_2) \times \dots \times P(r_n)$$

Épreuve de Bernoulli : deux issues, succès (probabilité p) et échec $(1 - p)$. Pour n répétitions indépendantes :

- probabilité de n succès : p^n ; de n échecs : $(1 - p)^n$;
- probabilité d'**au moins un succès** : $1 - (1 - p)^n$;
- probabilité d'**exactement k succès** : $\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ (nombre de chemins $\times$ probabilité d'un chemin).

Premier succès au rang k : $(1 - p)^{k-1} p$.

Seuil : $1 - (1 - p)^n \geq s \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(1 - s)}{\ln(1 - p)}$ (on divise par $\ln(1 - p) < 0$: l'inégalité change de sens).

Épreuves dépendantes : si la probabilité de succès dépend du résultat précédent, on utilise un arbre avec des probabilités conditionnelles, ou une **suite** $p_{n+1} = a p_n + b$.

Correction de l'exercice 1 - Une pièce puis un dé

a) Les deux épreuves sont indépendantes : on **multiplie**,

$$P(\text{pile et 6}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

b) On passe par le contraire : ni « face » ni pair, c'est « pile » **et** impair.

$$\text{— } P(\text{pile et impair}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{— } P(\text{face ou pair}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{— } \textbf{Vérification} \text{ par la réunion : } \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \checkmark$$

— **Univers** : $2 \times 6 = 12$ couples équiprobables ; on peut aussi compter, 9 couples favorables sur 12.

Réponse. a) $\frac{1}{12}$ · b) $\frac{3}{4}$.

Correction de l'exercice 2 - Trois épreuves de Bernoulli

a) Chaque niveau est un lancer, avec les **mêmes** probabilités 0,2 et 0,8 (indépendance).

b) **Exactement une fois** : trois chemins (SEE, ESE, EES), chacun de probabilité $0,2 \times 0,8^2 = 0,128$:

$$P(\text{exactement un}) = 3 \times 0,2 \times 0,8^2 = 0,384$$

Au moins une fois : contraire de « trois échecs » (EEE) :

$$- 1 - 0,8^3 = 1 - 0,512 = 0,488.$$

$$- \textbf{Contrôle} : P(2) = 3 \times 0,2^2 \times 0,8 = 0,096 \text{ et } P(3) = 0,008 ; \\ 0,512 + 0,384 + 0,096 + 0,008 = 1 \checkmark$$

Réponse. 0,384 ; 0,488.

Correction de l'exercice 3 - Combien d'essais ?

a) Aucun gagnant parmi n : $0,95^n$ (indépendance). Donc

$$p_n = 1 - 0,95^n$$

$$b) 1 - 0,95^n \geq 0,9 \Leftrightarrow 0,95^n \leq 0,1 \Leftrightarrow n \ln 0,95 \leq \ln 0,1.$$

$$- \ln 0,95 < 0 : \text{ en divisant, le sens change, } n \geq \frac{\ln 0,1}{\ln 0,95} \approx 44,9. \text{ Il faut 45 tickets.}$$

$$- \text{ Pour } 0,99 : n \geq \frac{\ln 0,01}{\ln 0,95} \approx 89,8, \text{ soit 90 tickets.}$$

— **Remarque** : passer de 90 % à 99 % de chances double le nombre de tickets ; les dernières certitudes coûtent cher.

Réponse. a) $1 - 0,95^n$ · b) 45 tickets ; 90 tickets.

Correction de l'exercice 4 - Contrôle d'un lot

Chaque pièce est une épreuve de Bernoulli (défectueuse avec $p = 0,1$), répétée 4 fois de façon indépendante.

a) Calcul :

$$P(0) = 0,9^4 = 0,6561$$

b) La pièce défectueuse peut être la 1^{re}, la 2^e, la 3^e ou la 4^e : 4 chemins de probabilité $0,1 \times 0,9^3$.

$$- P(1) = 4 \times 0,1 \times 0,729 = 0,2916.$$

c) Par le complémentaire :

$$- P(\geq 2) = 1 - P(0) - P(1) = 1 - 0,6561 - 0,2916 = 0,0523.$$

— **Interprétation** : dans environ 5 % des prélèvements, on trouve au moins deux pièces défectueuses sur quatre, ce qui pourrait inquiéter à tort — c'est la fluctuation d'échantillonnage.

Réponse. a) 0,6561 · b) 0,2916 · c) 0,0523.

Correction de l'exercice 5 - Des tirs qui ne sont pas indépendants

a) **Deux réussites** :

$$P(T_1 \cap T_2) = 0,7 \times 0,8 = 0,56$$

Exactement une : $0,7 \times 0,2 + 0,3 \times 0,5 = 0,14 + 0,15 = 0,29$.

b) $P(T_2) = 0,56 + 0,15 = 0,71$ et $P(T_1)P(T_2) = 0,7 \times 0,71 = 0,497 \neq 0,56$: les tirs **ne sont pas** indépendants (la confiance joue).

— Dans le modèle indépendant, deux réussites auraient la probabilité $0,7^2 = 0,49$, et exactement une $2 \times 0,7 \times 0,3 = 0,42$.

— **Leçon** : l'arbre avec des probabilités **différentes** selon les branches traduit une dépendance ; on ne peut plus multiplier les probabilités « simples ».

Réponse. a) 0,56 et 0,29 · b) non indépendants ($0,56 \neq 0,497$).

Correction de l'exercice 6 - Une suite de parties

a) **Probabilités totales** sur l'arbre :

$$g_{n+1} = 0,6g_n + 0,3(1 - g_n) = 0,3g_n + 0,3$$

b) $g_2 = 0,3 \times 0,5 + 0,3 = 0,45$; $g_3 = 0,3 \times 0,45 + 0,3 = 0,435$.

c) $v_{n+1} = g_{n+1} - \frac{3}{7} = 0,3g_n + 0,3 - \frac{3}{7} = 0,3g_n - \frac{9}{70} = 0,3\left(g_n - \frac{3}{7}\right) = 0,3v_n$ (car $0,3 \times \frac{3}{7} = \frac{9}{70}$).

— (v_n) est géométrique de raison $0,3 \in]-1; 1[$, donc $v_n \rightarrow 0$ et $g_n \rightarrow \frac{3}{7} \approx 0,43$.

— **Interprétation** : à long terme, le joueur gagne environ 43 % des parties, quelle que soit l'issue de la première.

Réponse. b) $g_2 = 0,45$, $g_3 = 0,435$ · c) $g_n \rightarrow \frac{3}{7}$.

Correction de l'exercice 7 - Tirages avec remise

a) Avec remise, la composition de l'urne est la même à chaque tirage : la probabilité de tirer une rouge vaut toujours $\frac{3}{5}$, quel que soit le résultat précédent.

b) Il y a 3 positions possibles pour la boule verte (RRV, RVR, VRR), chacune de probabilité $\left(\frac{3}{5}\right)^2 \times \frac{2}{5}$:

$$P(\text{exactement 2 rouges}) = 3 \times \frac{9}{25} \times \frac{2}{5} = \frac{54}{125} = 0,432$$

c) Contraire de « trois rouges » :

$$1 - \left(\frac{3}{5}\right)^3 = 1 - \frac{27}{125} = \frac{98}{125} = 0,784.$$

— **Formule générale** : $3 = \binom{3}{2}$ est le nombre de façons de placer les 2 succès parmi les 3 tirages.

Réponse. b) $\frac{54}{125} = 0,432$ · c) $\frac{98}{125} = 0,784$.

Correction de l'exercice 8 - Le premier six

Les lancers sont indépendants ; « premier 6 au rang k » signifie $k - 1$ échecs puis un succès.

a) Calcul :

$$P(\text{premier 6 au rang 3}) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{25}{216} \approx 0,116$$

b) $P(\text{rang } k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6}$.

c) « Plus de 10 lancers » signifie « pas de 6 lors des 10 premiers » :

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx 0,162.$$

— **Remarque** : la somme des probabilités des rangs 1, 2, 3... est une somme géométrique qui tend vers $\frac{1/6}{1 - 5/6} = 1$: on finit presque sûrement par obtenir un 6.

Réponse. a) $\frac{25}{216}$ · b) $\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}$ · c) $\approx 0,162$.

Correction de l'exercice 9 - Au moins deux six

On passe par le complémentaire : perdre, c'est obtenir **zéro** ou **exactement un** 6.

— **Zéro** : $\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}$.

— **Exactement un** : 4 positions possibles pour le 6, chacune de probabilité $\frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^3$:

$$4 \times \frac{1}{6} \times \frac{125}{216} = \frac{500}{1296}$$

Gagner :

— $1 - \frac{625}{1296} - \frac{500}{1296} = \frac{171}{1296} \approx 0,132$.

— **Interprétation** : le joueur ne gagne qu'environ une fois sur huit.

— **Contrôle** : $171 = 6 \times 25 + 4 \times 5 + 1$ (exactement deux, trois ou quatre 6) ✓

Réponse. $\frac{171}{1296} \approx 0,132$.

Correction de l'exercice 10 - Probabilités totales puis répétition

a) **Probabilités totales** :

$$p = 0,7 \times 0,02 + 0,3 \times 0,05 = 0,014 + 0,015 = 0,029$$

b) Les trois pièces sont des épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre $p = 0,029$:

— $P(\text{aucune défectueuse}) = 0,971^3 \approx 0,9155$;

— $P(\text{au moins une}) \approx 1 - 0,9155 = 0,0845$.

— **Méthode** : le premier niveau (machine) sert à calculer p ; ensuite, seule compte la probabilité **globale** de défaut de chaque pièce.

— **Interprétation** : un client sur douze environ reçoit au moins une pièce défectueuse.

Réponse. a) $0,029$ · b) $\approx 0,0845$.

Correction de l'exercice 11 - Une séance de tirs au but

a) Cinq succès indépendants :

$$0,8^5 = 0,32768$$

b) « Au moins 4 » = « exactement 4 » ou « exactement 5 » (incompatibles).

— **Exactement 4** : l'échec peut être à l'une des 5 places, chaque chemin a la probabilité $0,8^4 \times 0,2$:

— $5 \times 0,4096 \times 0,2 = 0,4096$.

— Total : $0,32768 + 0,4096 = 0,73728$.

— **Interprétation** : même un bon tireur (quatre tirs sur cinq en moyenne) ne réussit la série parfaite qu'une fois sur trois.

Réponse. a) $\approx 0,328$ · b) $\approx 0,737$.

Correction de l'exercice 12 - Le premier à faire six gagne

a) **Premier lancer** : $\frac{1}{6}$.

Deuxième lancer d'Alice : Alice rate, Bob rate, Alice réussit : $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$.

b) Avant le $(k + 1)$ -ième lancer d'Alice, il y a eu k tours complets ratés (Alice puis Bob), chacun de probabilité $\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$, puis un succès :

$$\left(\frac{25}{36}\right)^k \times \frac{1}{6}$$

c) On additionne sur tous les k (événements incompatibles) — somme d'une suite géométrique de raison $\frac{25}{36}$:

$$- P(\text{Alice gagne}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{1 - \frac{25}{36}} = \frac{1}{6} \times \frac{36}{11} = \frac{6}{11} \approx 0,545.$$

— **Interprétation** : commencer donne un avantage ; Bob ne gagne qu'avec la probabilité $\frac{5}{11}$.

Réponse. a) $\frac{1}{6}$ et $\frac{25}{216}$ · c) $\frac{6}{11}$.

Correction de l'exercice 13 - Redondance d'un système

Avec n composants, le système tombe en panne si **tous** tombent en panne :

$$P(\text{fonctionne}) = 1 - 0,1^n$$

— On veut $1 - 0,1^n \geq 0,999 \Leftrightarrow 0,1^n \leq 0,001 = 0,1^3 \Leftrightarrow n \geq 3$.

Il faut 3 **composants**.

— **Contrôle** : $n = 2$ donne $0,99 < 0,999$; $n = 3$ donne exactement $0,999$ ✓

— **Comparaison** : montés « en série » (tous nécessaires), trois composants ne fonctionneraient ensemble qu'avec la probabilité $0,9^3 = 0,729$.

Réponse. 3 composants.

Correction de l'exercice 14 - Retrouver la composition d'une urne

a) À chaque tirage, $P(R) = \frac{2}{n+2}$ et $P(B) = \frac{n}{n+2}$. Les tirages sont indépendants :

$$P(\text{même couleur}) = P(RR) + P(BB) = \frac{4}{(n+2)^2} + \frac{n^2}{(n+2)^2} = \frac{4+n^2}{(n+2)^2}$$

$$b) \frac{4+n^2}{(n+2)^2} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow 9(4+n^2) = 5(n^2+4n+4)$$

$$- \Leftrightarrow 4n^2 - 20n + 16 = 0 \Leftrightarrow n^2 - 5n + 4 = 0 \Leftrightarrow (n-1)(n-4) = 0.$$

$$- n = 1 \text{ ou } n = 4.$$

$$- \textbf{Vérification} \text{ pour } n = 4 : \frac{4+16}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9} \checkmark ; \text{ pour } n = 1 : \frac{5}{9} \checkmark$$

Réponse. b) $n = 1$ ou $n = 4$.

Correction de l'exercice 15 – Une pièce suspecte

a) **Pièce normale** : trois lancers indépendants, $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$. **Pièce truquée** : probabilité 1.

b) **Probabilités totales** :

$$P(FFF) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{16} + \frac{8}{16} = \frac{9}{16}$$

Bayes :

— $P_{FFF}(\text{truquée}) = \frac{1/2}{9/16} = \frac{8}{9} \approx 0,89$.

— **Interprétation** : trois « face » de suite rendent la pièce truquée très probable, sans en donner la certitude. Avec dix « face » de suite, on obtiendrait $\frac{1\,024}{1\,025}$.

Réponse. a) $\frac{1}{8}$ et 1 · b) $\frac{8}{9}$.