

Plaque 5 - Problèmes de synthèse : arbres, probabilités totales et dépistage

Probabilités conditionnelles et indépendance — Terminale spé maths Corrections détaillées

Boîte à outils

Probabilité conditionnelle. Pour $P(B) \neq 0$:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{donc} \quad P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$$

Arbre pondéré. Les probabilités du **premier niveau** sont les $P(B_i)$; celles des **branches suivantes** sont **conditionnelles**. La probabilité d'un **chemin** est le **produit** des probabilités rencontrées, et la somme des branches partant d'un même nœud vaut 1.

Formule des probabilités totales. Si $B_1, \dots, B_n$ forment une **partition** de l'univers :

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \times P_{B_i}(A)$$

Cas courant à deux branches :

$$P(A) = P(B)P_B(A) + P(\bar{B})P_{\bar{B}}(A)$$

Renversement (formule de Bayes).

$$P_A(B) = \frac{P(B) \times P_B(A)}{P(A)}$$

Indépendance. A et B sont indépendants si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \quad \Leftrightarrow \quad P_B(A) = P(A)$$

- Si A et B sont indépendants, il en va de même pour A et $\bar{B}$, $\bar{A}$ et B , $\bar{A}$ et $\bar{B}$.
- **Ne pas confondre** avec « incompatibles » ($A \cap B = \emptyset$) : deux événements de probabilité non nulle **incompatibles** ne sont **jamais** indépendants.

Répétition d'épreuves indépendantes. Pour n répétitions identiques et indépendantes,

$$P(\text{aucun succès}) = (1 - p)^n \quad P(\text{au moins un succès}) = 1 - (1 - p)^n$$

Vocabulaire du dépistage. Sensibilité = $P_M(T)$ · spécificité = $P_{\bar{M}}(\bar{T})$ · valeur prédictive positive = $P_T(M)$.

Correction de l'exercice 1 - Probabilité conditionnelle de base

— **Conditionnelles :**

$$P_B(A) = \frac{0,2}{0,5} = 0,4 \quad P_A(B) = \frac{0,2}{0,4} = 0,5$$

- **Test d'indépendance :** $P(A) \times P(B) = 0,4 \times 0,5 = 0,2 = P(A \cap B)$ ✓
- **Conclusion :** A et B sont **indépendants**.
- **Lecture cohérente :** $P_B(A) = 0,4 = P(A)$ — savoir que B est réalisé ne change **rien** à la probabilité de A . C'est la définition même de l'indépendance.
- **Contrôle par l'union :** $P(A \cup B) = 0,4 + 0,5 - 0,2 = 0,7$.

- **Contrôle du complémentaire** : $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0,7 = 0,3 = 0,6 \times 0,5$ ✓ — les complémentaires sont aussi indépendants, comme le veut la propriété.

Réponse. $P_B(A) = 0,4$, $P_A(B) = 0,5$; événements indépendants.

Correction de l'exercice 2 - Arbre à deux niveaux

- **Notations** : U_1, U_2 le choix de l'urne, R « la boule est rouge ».
- **Premier niveau** : $P(U_1) = P(U_2) = 0,5$.
- **Branches conditionnelles** : $P_{U_1}(R) = \frac{3}{5} = 0,6$ et $P_{U_2}(R) = \frac{1}{5} = 0,2$.
- **Probabilités totales** :

$$P(R) = 0,5 \times 0,6 + 0,5 \times 0,2 = 0,3 + 0,1 = 0,4$$
- **Vérification par le complémentaire** : $P(V) = 0,5 \times 0,4 + 0,5 \times 0,8 = 0,2 + 0,4 = 0,6$, et $0,4 + 0,6 = 1$ ✓
- **Interprétation** : $P(R) = 0,4$ est la **moyenne** des deux proportions 0,6 et 0,2, car les urnes sont équiprobables.
- **Piège classique** : compter « 4 rouges sur 10 boules au total » donne ici la bonne réponse **par hasard** (les urnes ont le même effectif) ; ce raccourci est faux dès que les urnes ont des tailles différentes.

Réponse. $P(R) = 0,4$.

Correction de l'exercice 3 - Renversement du conditionnement

- **Formule de Bayes** :

$$P_R(U_1) = \frac{P(U_1 \cap R)}{P(R)} = \frac{0,5 \times 0,6}{0,4} = \frac{0,3}{0,4} = 0,75$$
- **Réponse** : 75 %.
- **Contrôle** : $P_R(U_2) = \frac{0,1}{0,4} = 0,25$, et $0,75 + 0,25 = 1$ ✓
- **Interprétation** : a priori les deux urnes étaient équiprobables (50 % chacune) ; **observer une boule rouge** fait passer U_1 de 50 % à 75 %, car U_1 est trois fois plus « riche » en rouges.
- **Rapport de vraisemblance** : $\frac{0,6}{0,2} = 3$, et l'on retrouve bien $\frac{0,75}{0,25} = 3$ ✓
- **À retenir** : $P_R(U_1) \neq P_{U_1}(R)$ — ici 0,75 contre 0,6. Confondre les deux est l'erreur la plus fréquente du chapitre.

Réponse. $P_R(U_1) = 0,75$.

Correction de l'exercice 4 - Test de dépistage

- **Notations** : M « malade », T « test positif ».
- **Données** : $P(M) = 0,02$, $P_M(T) = 0,95$ (sensibilité), $P_{\bar{M}}(T) = 0,03$.
- **Probabilité d'un test positif** :

$$P(T) = 0,02 \times 0,95 + 0,98 \times 0,03 = 0,019 + 0,0294 = 0,0484$$
- **Valeur prédictive positive** :

$$P_T(M) = \frac{0,019}{0,0484} \approx 0,3926$$

- **Réponse** : environ 39,3 %.

- **Commentaire essentiel** : malgré un test « fiable à 95 % », **moins de deux positifs sur cinq** sont réellement malades. La raison est que les non-malades sont 49 fois plus nombreux : $0,98 \times 0,03 = 0,0294$ **faux positifs** contre seulement 0,019 vrais positifs.
- **Contrôle** : $P_T(\overline{M}) = \frac{0,0294}{0,0484} \approx 0,6074$, et $0,3926 + 0,6074 = 1$ ✓
- **Valeur prédictive négative** : $P_T(\overline{M}) = \frac{0,98 \times 0,97}{1 - 0,0484} = \frac{0,9506}{0,9516} \approx 0,9989$ — un test négatif est, lui, très rassurant.

Réponse. $P_T(M) \approx 0,393$, soit environ 39 %.

Correction de l'exercice 5 - Indépendance à vérifier

- **Probabilité de A** : les couples de somme 7 sont (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1) — six cas sur 36.

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

- **Probabilité de B** : $P(B) = \frac{1}{6}$.
- **Intersection** : un seul couple, (3, 4), donc $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$.
- **Test** : $P(A) \times P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ ✓
- **Conclusion** : les événements sont **indépendants**.
- **Lecture** : $P_B(A) = \frac{1/36}{1/6} = \frac{1}{6} = P(A)$ — connaître le premier dé ne change pas la probabilité d'obtenir une somme de 7, car **chaque** valeur du premier dé laisse exactement **une** valeur gagnante au second.
- **Contre-exemple instructif** : avec A' « la somme vaut 6 », $P(A') = \frac{5}{36}$ et $P(A' \cap B) = \frac{1}{36}$, alors que $\frac{5}{36} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{216} \neq \frac{1}{36}$ — cette fois il y a **dépendance**. La somme 7 est un cas très particulier.

Réponse. Oui : $P(A \cap B) = \frac{1}{36} = P(A)P(B)$.

Correction de l'exercice 6 - Au moins un succès

- **Événement contraire** : « aucun tir au but » a pour probabilité $0,7^n$.
- **Inéquation** :

$$1 - 0,7^n > 0,95 \Leftrightarrow 0,7^n < 0,05$$

- **Passage au logarithme** (avec $\ln 0,7 < 0$, donc changement de sens) :

$$n > \frac{\ln 0,05}{\ln 0,7} \approx \frac{-2,9957}{-0,3567} \approx 8,399$$

- **Conclusion** : il faut $n \geq 9$ tirs.
- **Vérifications** : $0,7^8 \approx 0,05765 > 0,05$ (donc 8 tirs ne suffisent pas : $1 - 0,05765 \approx 0,9424 < 0,95$).
- $0,7^9 \approx 0,04035 < 0,05$, soit une probabilité de succès $\approx 0,9596 > 0,95$ ✓
- **Réponse** : **9 tirs**.
- **Réflexe à garder** : « au moins un » se traite **toujours** par le complémentaire « aucun », qui est un simple produit.

Réponse. $n = 9$ tirs ($1 - 0,7^9 \approx 0,960$).

Correction de l'exercice 7 - Arbre à trois branches

— **Notations** : M_1 , M_2 , M_3 et D « pièce défectueuse ».

— **Probabilité d'un défaut** :

$$P(D) = 0,5 \times 0,01 + 0,3 \times 0,02 + 0,2 \times 0,05 = 0,005 + 0,006 + 0,010 = 0,021$$

— **Renversements** :

$$P_D(M_1) = \frac{0,005}{0,021} \approx 0,2381$$

$$P_D(M_2) = \frac{0,006}{0,021} \approx 0,2857$$

$$P_D(M_3) = \frac{0,010}{0,021} \approx 0,4762$$

— **Contrôle** : la somme vaut $\frac{0,021}{0,021} = 1$ ✓

— **Conclusion** : la pièce vient le plus probablement de M_3 (environ 47,6 %).

— **Commentaire** : M_3 ne produit que 20 % des pièces, mais son taux de défaut est **cinq fois** celui de M_1 — c'est elle qui pèse le plus dans les rebuts. Le taux global de défaut est de 2,1 %, et M_3 en fournit presque la moitié : c'est **la** machine à réviser en priorité.

Réponse. M_3 , avec $P_D(M_3) \approx 0,476$ (taux global de défaut 2,1 %).

Correction de l'exercice 8 - Tirages sans remise

— **Attention** : sans remise, les tirages ne sont **pas indépendants** — la composition change.

$$\text{— Chemin blanc puis noir : } \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{24}{90}.$$

$$\text{— Chemin noir puis blanc : } \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{24}{90}.$$

— **Somme** :

$$P = \frac{24}{90} + \frac{24}{90} = \frac{48}{90} = \frac{8}{15} \approx 0,5333$$

— **Contrôle par le complémentaire** : deux blanches $\frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{12}{90}$; deux noires $\frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{30}{90}$.

$$\text{— Total : } \frac{12 + 30 + 48}{90} = \frac{90}{90} = 1 \quad \checkmark$$

$$\text{— Contrôle par les combinaisons : } \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{4 \times 6}{45} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15} \quad \checkmark$$

— **Comparaison avec remise** : on aurait obtenu $2 \times 0,4 \times 0,6 = 0,48$ — légèrement moins, car sans remise le second tirage « favorise » l'autre couleur.

Réponse. $P = \frac{8}{15} \approx 0,533$.

Correction de l'exercice 9 - Événements incompatibles ou indépendants

Cas incompatibles. $A \cap B = \emptyset$, donc $P(A \cap B) = 0$ et

$$P(A \cup B) = 0,3 + 0,4 = 0,7$$

Cas indépendants. $P(A \cap B) = 0,3 \times 0,4 = 0,12$, donc

$$P(A \cup B) = 0,3 + 0,4 - 0,12 = 0,58$$

Les deux à la fois ?

- Il faudrait $P(A \cap B) = 0$ **et** $P(A \cap B) = 0,12$ — **impossible**.
- **Conclusion** : deux événements de probabilités **non nulles** ne peuvent pas être simultanément incompatibles et indépendants.
- **Raison profonde** : si A et B sont incompatibles, savoir que B est réalisé **interdit** A , donc $P_B(A) = 0 \neq P(A)$ — c'est une dépendance **maximale**, à l'opposé de l'indépendance.
- **Exception formelle** : le seul cas compatible est $P(A) = 0$ ou $P(B) = 0$, sans intérêt pratique.

Réponse. Non (sauf probabilité nulle) ; $P(A \cup B) = 0,7$ si incompatibles, $0,58$ si indépendants.

Correction de l'exercice 10 - Probabilité d'une réunion conditionnelle

- **Notations** : A « anglais », E « espagnol », avec $P(A) = 0,6$, $P(E) = 0,4$, $P(A \cap E) = 0,25$.
- **Conditionnelle** :

$$P_A(E) = \frac{0,25}{0,6} \approx 0,4167$$

- **Réunion** : $P(A \cup E) = 0,6 + 0,4 - 0,25 = 0,75$.
- **Aucune des deux** : $P(\bar{A} \cap \bar{E}) = 1 - 0,75 = 0,25$, soit 25 %.
- **Test d'indépendance** : $0,6 \times 0,4 = 0,24 \neq 0,25$ — les deux choix ne sont **pas indépendants**, mais ils en sont très proches.
- **Lecture** : $P_A(E) \approx 0,417 > P(E) = 0,4$ — faire de l'anglais rend l'espagnol **légèrement plus probable** (élèves polyglottes).
- **Contrôle par les effectifs** : sur 100 élèves, 35 font anglais seul, 15 espagnol seul, 25 les deux et 25 aucune. Total 100 ✓

Réponse. $P_A(E) \approx 0,417$; 25 % ne font aucune des deux langues.

Correction de l'exercice 11 - Chaîne de deux étapes

- **Notations** : V « a révisé », S « réussit ».
- **Probabilité de réussite** :

$$P(S) = 0,7 \times 0,9 + 0,3 \times 0,3 = 0,63 + 0,09 = 0,72$$

- **Renversement** :

$$P_S(V) = \frac{0,63}{0,72} = 0,875$$

- **Réponse** : 87,5 %.
- **Contrôle** : $P_S(\bar{V}) = \frac{0,09}{0,72} = 0,125$, et $0,875 + 0,125 = 1$ ✓
- **Interprétation** : la réussite est un **bon indicateur** de révision — 87,5 % contre 70 % a priori.
- **Symétrie intéressante** : en cas d'échec, $P_{\bar{S}}(V) = \frac{0,7 \times 0,1}{0,28} = \frac{0,07}{0,28} = 0,25$ — un échec fait chuter la probabilité de révision de 70 % à 25 %.
- **Contrôle global** : $0,72 \times 0,875 + 0,28 \times 0,25 = 0,63 + 0,07 = 0,7 = P(V)$ ✓

Réponse. $P_S(V) = 0,875$.

Correction de l'exercice 12 - Trois tirages indépendants

- **Exactement deux piles** : trois arrangements possibles (PPF, PFP, FPP), chacun de probabilité $0,6^2 \times 0,4$.

$$P = 3 \times 0,36 \times 0,4 = 0,432$$

- **Trois piles** : $0,6^3 = 0,216$.

- **Au moins deux piles** :

$$0,432 + 0,216 = 0,648$$

- **Vérification par la loi complète** : zéro pile $0,4^3 = 0,064$; un pile $3 \times 0,6 \times 0,16 = 0,288$.
- **Somme totale** : $0,064 + 0,288 + 0,432 + 0,216 = 1$ ✓
- **Lien avec la loi binomiale** : on reconnaît $B(3; 0,6)$, avec $P(X = k) = \binom{3}{k} 0,6^k 0,4^{3-k}$ — les coefficients 1, 3, 3, 1 sont ceux du triangle de Pascal.
- **Espérance** : $3 \times 0,6 = 1,8$ pile en moyenne, cohérent avec une distribution centrée entre 1 et 2.

Réponse. Exactement deux piles : 0,432 ; au moins deux : 0,648.

Correction de l'exercice 13 - Détermination d'un paramètre

- **Notations** : D « défectueuse », R « rejetée », avec $P_D(R) = 0,9$ et $P_{\bar{D}}(R) = 0,02$.

- **Probabilités totales** :

$$P(R) = 0,9p + 0,02(1 - p) = 0,02 + 0,88p$$

- **Équation** : $0,02 + 0,88p = 0,04$, donc $0,88p = 0,02$ et

$$p = \frac{0,02}{0,88} \approx 0,02273$$

- **Réponse** : environ 2,27 % de pièces défectueuses.
- **Vérification** : $0,9 \times 0,02273 + 0,02 \times 0,97727 = 0,020455 + 0,019545 = 0,04$ ✓
- **Valeur prédictive du rejet** : $P_R(D) = \frac{0,020455}{0,04} \approx 0,5114$ — à peine une pièce rejetée sur deux est réellement défectueuse.
- **Commentaire** : les faux rejets (0,0195) sont presque aussi nombreux que les vrais (0,0205), parce que les bonnes pièces sont 43 fois plus nombreuses. Abaisser le taux de faux rejets à 1 % ferait passer la valeur prédictive à $\frac{0,020455}{0,020455 + 0,009773} \approx 0,677$.

Réponse. $p = \frac{0,02}{0,88} \approx 2,27$ %.

Correction de l'exercice 14 - Indépendance de trois événements

Montage en série — il faut que **tous** fonctionnent :

$$P = 0,9 \times 0,95 \times 0,8 = 0,684$$

Montage en parallèle — il suffit qu'**au moins un** fonctionne, donc on passe par le contraire « tous en panne » :

$$P = 1 - 0,1 \times 0,05 \times 0,2 = 1 - 0,001 = 0,999$$

- **Comparaison** : 68,4 % contre 99,9 % — la **redondance** (parallèle) est spectaculairement plus fiable.
- **Contrôle du série** : $0,9 \times 0,95 = 0,855$, puis $0,855 \times 0,8 = 0,684$ ✓

- **Remarque sur le maillon faible** : en série, la fiabilité est **inférieure** à celle du plus mauvais composant ($0,684 < 0,8$) — chaque composant supplémentaire dégrade l'ensemble.
- **Contrôle du parallèle** : la panne totale exige trois pannes simultanées, soit 1 chance sur 1000 ✓
- **Application** : c'est la raison pour laquelle les systèmes critiques (freinage, alimentation électrique) sont **doublés**, jamais mis en série.

Réponse. Série : $0,684$ · parallèle : $0,999$.

Correction de l'exercice 15 - Probabilités conditionnelles et effectifs

Tableau des effectifs.

! ·	Sport	Pas de sport	Total
Filles	45	75	120
Garçons	35	45	80
Total	80	120	200

a) **Conditionnelle** :

$$P_F(S) = \frac{45}{120} = 0,375$$

b) **Test d'indépendance** :

- $P(F) = \frac{120}{200} = 0,6$ et $P(S) = \frac{80}{200} = 0,4$.
- $P(F) \times P(S) = 0,24$, alors que $P(F \cap S) = \frac{45}{200} = 0,225$.
- **Conclusion** : $0,225 \neq 0,24$, les événements ne sont **pas indépendants**.
- **Lecture** : $P_F(S) = 0,375 < P(S) = 0,4$ — les filles pratiquent un peu **moins** en club que la moyenne.
- **Contrôle côté garçons** : $P_G(S) = \frac{35}{80} = 0,4375 > 0,4$ ✓ — cohérent avec le déséquilibre observé.
- **Effectif d'indépendance** : il aurait fallu $0,24 \times 200 = 48$ filles sportives au lieu de 45 pour que les événements soient indépendants.

Réponse. a) $P_F(S) = 0,375$ · b) non : $0,225 \neq 0,24$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : maladie et double test

a) **Probabilité d'un positif** : avec $P(M) = 0,01$, $P_M(T) = 0,98$ et $P_{\bar{M}}(T) = 1 - 0,96 = 0,04$,
 $P(T) = 0,01 \times 0,98 + 0,99 \times 0,04 = 0,0098 + 0,0396 = 0,0494$

b) **Valeur prédictive positive** :

$$P_T(M) = \frac{0,0098}{0,0494} \approx 0,1984$$

- Moins de **un positif sur cinq** est malade : les 0,0396 faux positifs écrasent les 0,0098 vrais positifs.

c) **Deux tests positifs**. La nouvelle probabilité a priori est $P_T(M) \approx 0,1984$; on refait un tour de Bayes.

$$P(T_2) = 0,1984 \times 0,98 + 0,8016 \times 0,04 = 0,19443 + 0,03206 = 0,22649$$

$$P_{T_1 \cap T_2}(M) = \frac{0,19443}{0,22649} \approx 0,8584$$

— **Réponse** : environ 85,8 %.

— **Contrôle par le calcul direct** :

$$\frac{0,01 \times 0,98^2}{0,01 \times 0,98^2 + 0,99 \times 0,04^2} = \frac{0,009604}{0,009604 + 0,001584} = \frac{0,009604}{0,011188} \approx 0,8584 \checkmark$$

— **Leçon** : un seul test positif sur une maladie **rare** est peu informatif (19,8 %) ; **deux** tests indépendants font bondir la certitude à 85,8 %. C'est précisément la logique des protocoles de dépistage en deux temps.

Réponse. a) $P(T) = 0,0494$ · b) $\approx 0,198$ · c) $\approx 0,858$.