

Plaquette 3 - Indépendance d'événements

Probabilités conditionnelles et indépendance — Terminale spé maths

Exercices

Méthode

Deux événements sont **indépendants** quand la réalisation de l'un ne change pas la probabilité de l'autre. On le **teste** par le calcul : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ (ou $P_A(B) = P(B)$). On l'**utilise** pour calculer : l'indépendance permet de multiplier les probabilités, et le passage au **complémentaire** règle les questions « au moins un ».

Exercice 1 - Tester l'indépendance

Dans chaque cas, les événements A et B sont-ils indépendants ?

- a) $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,25$, $P(A \cap B) = 0,1$.
- b) $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,2$, $P(A \cap B) = 0,15$.

Exercice 2 - Deux dés

On lance deux dés équilibrés. Soit A « le premier dé donne un nombre pair » et B « la somme des deux dés est paire ».

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 3 - Une indépendance fragile

- a) Dans un jeu de 32 cartes, montrer que les événements « tirer un roi » et « tirer un cœur » sont indépendants.
- b) On ajoute un joker au jeu (33 cartes). Ces événements sont-ils encore indépendants ?

Exercice 4 - Indépendance et complémentaire

Soit A et B deux événements indépendants. Démontrer que A et $\bar{B}$ sont indépendants.

Exercice 5 - Indépendance dans un tableau

Sur 200 personnes interrogées :

.	Pratique le vélo (V)	Ne pratique pas	Total
Télétravaille (T)	20	60	80
Ne télétravaille pas	30	90	120
Total	50	150	200

Les événements T et V sont-ils indépendants ?

Exercice 6 - Inclusion et indépendance

Soit A et B deux événements tels que $A \subset B$, avec $0 < P(A)$ et $P(B) < 1$.

Montrer que A et B ne peuvent pas être indépendants.

Exercice 7 - Calculer grâce à l'indépendance

A et B sont indépendants, avec $P(A) = 0,3$ et $P(B) = 0,5$. Calculer :

- $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$;
- $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ de deux façons.

Exercice 8 - Trois alarmes indépendantes

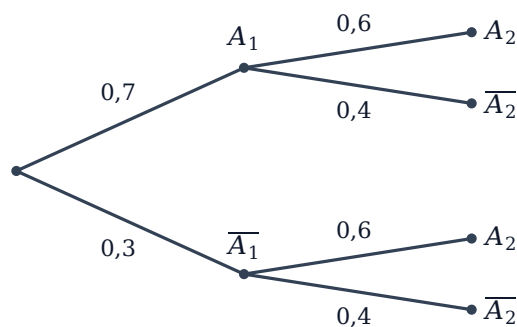
Un entrepôt est protégé par trois alarmes qui fonctionnent indépendamment ; chacune tombe en panne avec la probabilité 0,1.

- Quelle est la probabilité que les trois soient en panne ?
- Quelle est la probabilité qu'au moins une fonctionne ?
- Combien d'alarmes faudrait-il pour que cette probabilité dépasse 0,999 99 ?

Exercice 9 - Deux archers

Deux archers tirent chacun une flèche, indépendamment. Le premier atteint la cible avec la probabilité 0,7, le second avec la probabilité 0,6.

- Quelle est la probabilité que la cible soit atteinte ?
- Quelle est la probabilité qu'elle soit atteinte exactement une fois ?

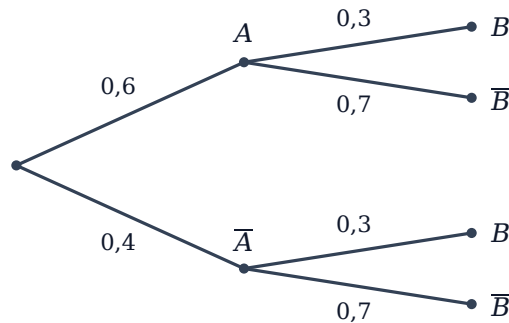


Les deux tirs indépendants

Exercice 10 – Reconnaître l'indépendance sur un arbre

On considère l'arbre ci-dessous.

- Calculer $P(B)$.
- Montrer que A et B sont indépendants.



Un arbre particulier

Exercice 11 – Avec ou sans remise

Une urne contient 3 boules rouges et 2 bleues. On tire deux boules successivement. On note R_1 et R_2 « la première (la seconde) boule est rouge ».

- Tirage **avec** remise : R_1 et R_2 sont-ils indépendants ?
- Tirage **sans** remise : calculer $P(R_1)$, $P(R_2)$ et $P(R_1 \cap R_2)$. Conclure.

Exercice 12 – Trouver la probabilité manquante

- A et B sont indépendants, $P(A) = 0,5$ et $P(A \cap B) = 0,2$. Calculer $P(B)$.
- A et B sont indépendants, $P(A) = 0,3$ et $P(A \cup B) = 0,65$. Calculer $P(B)$.

Exercice 13 – Groupes sanguins

En France, environ 42 % de la population est du groupe O et 85 % est de rhésus positif, ces deux caractères étant indépendants.

- Quelle proportion de la population est O positif ?
- Quelle proportion n'est ni du groupe O, ni de rhésus positif ?
- Quelle proportion est du groupe O ou de rhésus positif ?

Exercice 14 – Le problème du chevalier de Méré

Au XVII^e siècle, le chevalier de Méré pariait sur deux jeux :

- jeu 1 : obtenir au moins un 6 en lançant 4 fois un dé ;
- jeu 2 : obtenir au moins un double 6 en lançant 24 fois deux dés.

Calculer la probabilité de gagner à chaque jeu. Lequel est favorable au joueur ?

Exercice 15 – Indépendance approximative

Une enquête auprès de 1 000 personnes donne : 300 font du télétravail (T), 200 utilisent le vélo (V), et 62 font les deux.

- a) Calculer $P(T) \times P(V)$ et $P(T \cap V)$. Les événements sont-ils indépendants ?
- b) Calculer $P_T(V)$ et comparer à $P(V)$. Interpréter.