

Plaquette 1 - Probabilités conditionnelles et arbres

Probabilités conditionnelles et indépendance — Terminale spé maths

Exercices

Méthode

$P_A(B)$ est la probabilité de B **quand on sait** que A est réalisé : on restreint l'univers à A . Sur un **arbre pondéré**, les branches du second niveau portent des probabilités conditionnelles, et la probabilité d'un chemin s'obtient en **multipliant** les probabilités rencontrées. Premier réflexe : bien distinguer $P_A(B)$, $P(A \cap B)$ et $P_B(A)$.

Exercice 1 - Appliquer la définition

On donne $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,25$ et $P(A \cap B) = 0,2$.

- Calculer $P_A(B)$ et $P_B(A)$.
- Calculer $P_A(\bar{B})$.

Exercice 2 - Lire dans un tableau

Un magasin a interrogé 500 clients :

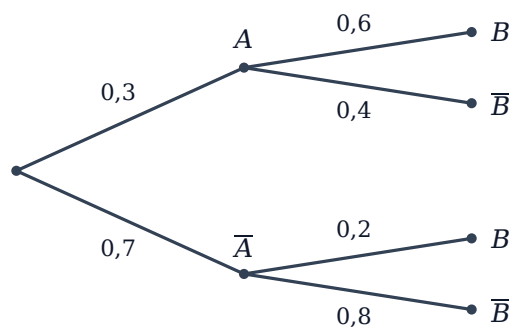
.	Carte de fidélité (F)	Sans carte	Total
Achat en ligne (L)	120	180	300
Achat en magasin	80	120	200
Total	200	300	500

On choisit un client au hasard. Calculer $P(F)$, $P_L(F)$ et $P_F(L)$.

Exercice 3 - Lire un arbre pondéré

On considère l'arbre pondéré ci-dessous.

- Donner $P(A)$, $P_A(B)$ et $P_{\bar{A}}(B)$.
- Calculer $P(A \cap B)$ et $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.
- Vérifier que la somme des probabilités des quatre chemins vaut 1.



Arbre pondéré

Exercice 4 - Compléter un arbre

On sait que $P(A) = 0,4$, $P_A(B) = 0,75$ et $P(\bar{A} \cap B) = 0,12$.

Construire l'arbre pondéré complet et donner la probabilité de chacun des quatre chemins.

Exercice 5 - Deux tirages sans remise

Une urne contient 4 boules rouges et 2 boules blanches. On tire successivement deux boules, **sans remise**.

- Construire l'arbre pondéré.
- Calculer la probabilité de tirer deux boules rouges.
- Calculer la probabilité que la **seconde** boule soit rouge. Commenter.

Exercice 6 - Pluie et retards

Un jour donné, il pleut avec la probabilité 0,3. S'il pleut, le bus est en retard avec la probabilité 0,5 ; sinon, avec la probabilité 0,1. On note P « il pleut » et R « le bus est en retard ».

- Construire l'arbre pondéré.
- Calculer la probabilité qu'il pleuve et que le bus soit en retard.
- Calculer la probabilité qu'il ne pleuve pas et que le bus soit à l'heure.

Exercice 7 - Bien lire l'énoncé

Dans un lycée, on note F « l'élève est une fille » et L « l'élève fait du latin ». Traduire chaque phrase par une probabilité ($P(F \cap L)$, $P_F(L)$ ou $P_L(F)$) :

- « 30 % des filles font du latin. »
- « 30 % des élèves sont des filles qui font du latin. »
- « 30 % des latinistes sont des filles. »

Exercice 8 - Un arbre à trois branches

Pour aller au travail, Léo prend l'itinéraire A (probabilité 0,5), B (0,3) ou C (0,2). Il est pris dans un embouteillage (E) avec la probabilité 0,2 sur A , 0,4 sur B et 0,1 sur C .

- Construire l'arbre pondéré et calculer la probabilité de chacun des six chemins.
- Quelle est la probabilité qu'il prenne l'itinéraire B sans embouteillage ?

Exercice 9 - Deux conditionnelles complémentaires

Soit A un événement de probabilité non nulle et B un événement quelconque.

- Démontrer que $P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$.
- En déduire que la somme des probabilités des branches issues d'un nœud d'un arbre vaut 1.

Exercice 10 - Dans un jeu de cartes

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes (as, roi, dame, valet, 10, 9, 8, 7 dans chacune des quatre couleurs).

- Sachant que la carte est une figure (roi, dame ou valet), quelle est la probabilité que ce soit un roi ?
- Sachant que c'est un roi, quelle est la probabilité que ce soit un cœur ?
- Sachant que c'est un cœur, quelle est la probabilité que ce soit un roi ?

Exercice 11 - Avec un dé

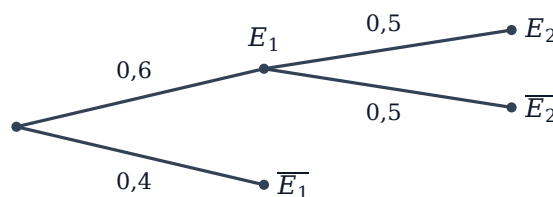
On lance un dé équilibré à six faces.

- Sachant que le résultat est pair, quelle est la probabilité d'avoir obtenu 6 ?
- Sachant que le résultat est au moins 4, quelle est la probabilité qu'il soit pair ?
- Calculer $P(\text{pair})$ et comparer à b).

Exercice 12 - Un recrutement en deux étapes

Un candidat passe un premier entretien, réussi avec la probabilité 0,6. S'il le réussit, il passe un second entretien, réussi avec la probabilité 0,5. Il est embauché s'il réussit les deux.

- Représenter la situation par un arbre.
- Quelle est la probabilité d'être embauché ? d'échouer au second entretien ?



Les étapes du recrutement

Exercice 13 - Retourner une probabilité conditionnelle

On sait que $P(A) = 0,2$, $P_A(B) = 0,5$ et $P(B) = 0,4$. Calculer $P_B(A)$.

Exercice 14 - Une enquête électorale

Lors d'une élection, 40 % des électeurs votent pour le candidat X. Parmi ses électeurs, 70 % ont plus de 50 ans ; parmi les autres, 30 %. On note X « vote pour X » et S « a plus de 50 ans ».

- Construire l'arbre pondéré.
- Calculer $P(X \cap S)$ et $P(\bar{X} \cap S)$, puis interpréter.

Exercice 15 – Deux dés et une somme connue

On lance deux dés équilibrés, et l'on apprend que la somme obtenue vaut 8.

- a) Quelle est la probabilité que l'un des dés affiche 6 ?
- b) Quelle est la probabilité d'avoir fait un double ?