

Plaquette 2 - Probabilités totales et Bayes

Probabilités conditionnelles et indépendance — Terminale spé maths

Exercices

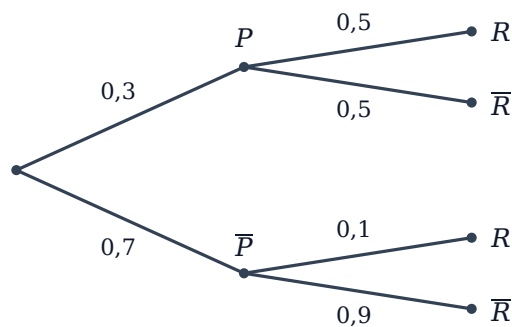
Méthode

La **formule des probabilités totales** calcule $P(B)$ en additionnant les chemins de l'arbre qui mènent à B . La **formule de Bayes** « retourne » l'arbre : connaissant l'effet (B est réalisé), on remonte à la cause ($P_B(A)$). Méthode sûre : calculer $P(A \cap B)$ (un chemin), puis $P(B)$ (tous les chemins vers B), puis diviser.

Exercice 1 - Une probabilité totale

Il pleut avec la probabilité 0,3. S'il pleut, le bus est en retard avec la probabilité 0,5 ; sinon, avec la probabilité 0,1.

Calculer la probabilité que le bus soit en retard.



Météo et retard du bus

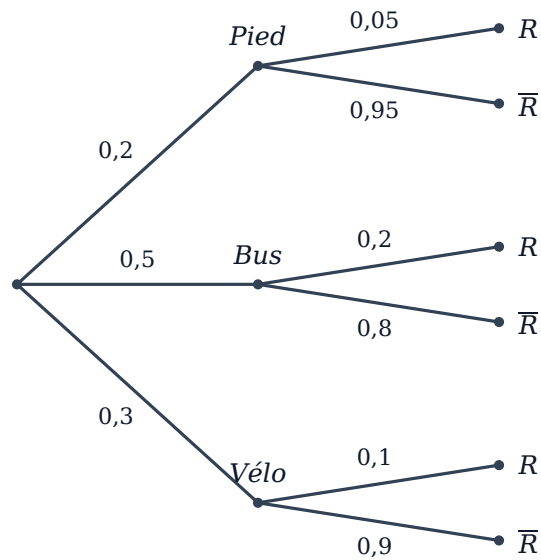
Exercice 2 - Remonter à la cause

Dans la situation de l'exercice précédent ($P(R) = 0,22$), le bus est en retard. Quelle est la probabilité qu'il ait plu ?

Exercice 3 – Trois moyens de transport

Un étudiant va à l'université à pied (20 % des jours), en bus (50 %) ou à vélo (30 %). Il arrive en retard avec la probabilité 0,05 à pied, 0,2 en bus et 0,1 à vélo.

- Calculer la probabilité qu'il soit en retard.
- Il est en retard : quelle est la probabilité qu'il ait pris le bus ? qu'il soit venu à pied ?



Moyen de transport et retard

Exercice 4 – Le filtre anti-spam

40 % des messages reçus sont des spams. Le filtre signale 95 % des spams, mais aussi, par erreur, 2 % des messages légitimes. On note S « le message est un spam » et F « le message est signalé ».

- Calculer $P(F)$.
- Un message est signalé : quelle est la probabilité que ce soit un spam ?
- Un message n'est pas signalé : quelle est la probabilité que ce soit tout de même un spam ?

Exercice 5 – Retourner un arbre

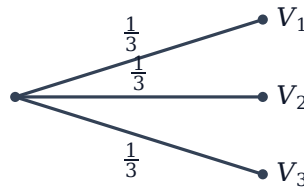
On reprend l'arbre : $P(A) = 0,3$, $P_A(B) = 0,6$, $P_{\bar{A}}(B) = 0,2$.

Construire l'arbre « inversé », dont le premier niveau porte B et $\bar{B}$, et le second A et $\bar{A}$.

Exercice 6 – Le problème de Monty Hall

Dans un jeu, une voiture est cachée derrière l'une de trois portes (au hasard). Le joueur choisit la porte 1. L'animateur, qui sait où est la voiture, ouvre alors une **autre** porte, toujours perdante. Le joueur peut garder sa porte ou changer.

En distinguant les trois positions possibles de la voiture, calculer la probabilité de gagner s'il **change** de porte.



V_k : la voiture est derrière la porte k (le joueur a choisi la porte 1)

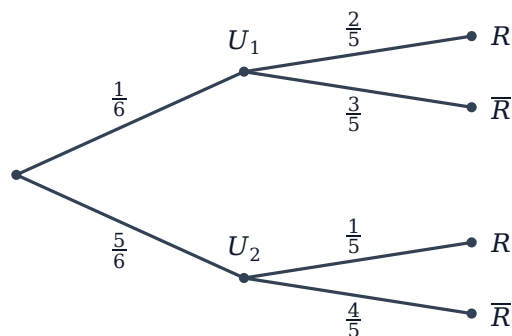
Exercice 7 – Retrouver une probabilité inconnue

On sait que $P_A(B) = 0,8$, $P_{\bar{A}}(B) = 0,3$ et $P(B) = 0,5$. Déterminer $P(A)$.

Exercice 8 – Une urne choisie par un dé

On lance un dé : si l'on obtient 6, on tire une boule dans l'urne U_1 (2 rouges, 3 blanches) ; sinon, dans l'urne U_2 (1 rouge, 4 blanches).

- Calculer la probabilité de tirer une boule rouge.
- La boule tirée est rouge : quelle est la probabilité qu'elle provienne de U_1 ?



Choix de l'urne puis tirage

Exercice 9 – Deviner ou savoir ?

À une question de QCM à 4 réponses, un élève connaît la bonne réponse avec la probabilité 0,6 ; sinon, il répond au hasard.

- Calculer la probabilité qu'il réponde correctement.
- Il a répondu correctement : quelle est la probabilité qu'il connaissait la réponse ?

Exercice 10 - Sport et filles

Dans un lycée, 55 % des élèves sont des filles. 40 % des filles et 30 % des garçons pratiquent un sport en club. On choisit au hasard un élève qui pratique un sport en club.

Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

Exercice 11 - Deux tests valent mieux qu'un

Une affection touche 10 % d'une population. Un test est positif chez 90 % des malades et chez 20 % des personnes saines. On fait passer à un patient **deux** tests, indépendants l'un de l'autre sachant son état.

- Calculer la probabilité d'être malade sachant qu'un seul test (le premier) est positif.
- Calculer la probabilité d'être malade sachant que les deux tests sont positifs.

Exercice 12 - L'erreur du procureur

Dans une ville de 100 000 habitants, un crime a été commis par un seul habitant. L'ADN retrouvé correspond à coup sûr au coupable, et correspond par hasard à un innocent avec la probabilité $\frac{1}{10\,000}$. Un habitant pris au hasard a un ADN correspondant.

Un procureur affirme : « la probabilité qu'un innocent ait cet ADN est de 1 sur 10 000, donc cet homme est coupable à 99,99 % ». Calculer la vraie probabilité qu'il soit coupable.

Exercice 13 - À partir de quelle proportion ?

Un indice B est présent dans 90 % des cas où A est réalisé et dans 10 % des cas où A ne l'est pas. On note $p = P(A)$.

- Exprimer $P_B(A)$ en fonction de p .
- Pour quelles valeurs de p a-t-on $P_B(A) \geq 0,5$?

Exercice 14 - Un message binaire bruité

Un émetteur envoie un 1 avec la probabilité 0,4 et un 0 sinon. À cause du bruit, un 1 est reçu comme 0 avec la probabilité 0,05, et un 0 est reçu comme 1 avec la probabilité 0,1.

- Calculer la probabilité de recevoir un 1.
- On reçoit un 1 : quelle est la probabilité qu'un 1 ait été envoyé ?

Exercice 15 - Conducteurs à risque

Une compagnie d'assurance classe 20 % de ses clients comme « à risque ». Un client à risque a un accident dans l'année avec la probabilité 0,3 ; un autre client, avec la probabilité 0,05.

- Quelle proportion des clients a un accident dans l'année ?
- Un client a eu un accident : quelle est la probabilité qu'il soit classé « à risque » ?