

Plaquette 4 – Répétitions indépendantes — type bac

Probabilités conditionnelles et indépendance — Terminale spé maths

Exercices

Méthode

Quand on répète une expérience dans des **conditions identiques et indépendantes**, la probabilité d'une suite de résultats est le **produit** des probabilités. On organise le calcul sur un arbre (chaque niveau est une répétition), on compte les chemins favorables, et on passe au **complémentaire** pour « au moins un ». Si les épreuves ne sont **pas** indépendantes, l'arbre porte des probabilités conditionnelles différentes selon les branches.

Exercice 1 – Une pièce puis un dé

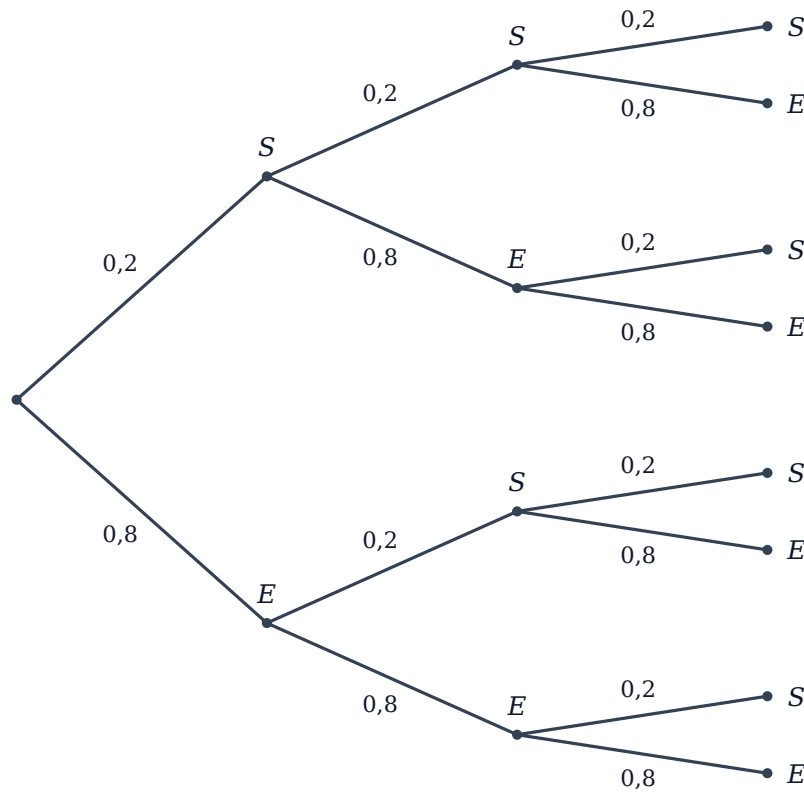
On lance une pièce équilibrée, puis un dé équilibré, les deux lancers étant indépendants.

- Quelle est la probabilité d'obtenir « pile » puis 6 ?
- Quelle est la probabilité d'obtenir « face » ou un nombre pair ?

Exercice 2 – Trois épreuves de Bernoulli

Un joueur de fléchettes atteint le centre avec la probabilité 0,2 à chaque lancer, les lancers étant indépendants. Il lance trois fléchettes.

- Construire l'arbre pondéré.
- Calculer la probabilité d'atteindre le centre exactement une fois, puis au moins une fois.



Trois lancers indépendants (S : centre atteint)

Exercice 3 – Combien d'essais ?

Un ticket de loterie est gagnant avec la probabilité 0,05, les tickets étant indépendants.

- Exprimer la probabilité d'avoir au moins un ticket gagnant parmi n tickets.
- Combien de tickets faut-il acheter pour que cette probabilité dépasse 0,9 ? et 0,99 ?

Exercice 4 – Contrôle d'un lot

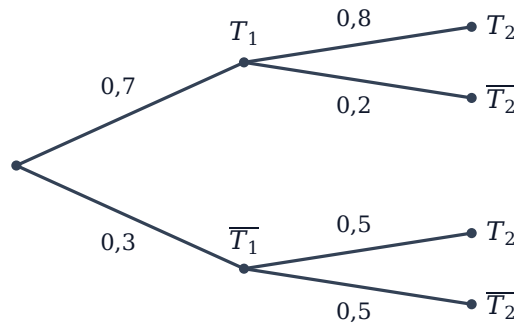
Une machine produit des pièces dont 10 % sont défectueuses, de façon indépendante. On prélève 4 pièces.

- Quelle est la probabilité qu'aucune ne soit défectueuse ?
- qu'exactly une le soit ?
- qu'au moins deux le soient ?

Exercice 5 - Des tirs qui ne sont pas indépendants

Un basketteur tire deux lancers francs. Il réussit le premier avec la probabilité 0,7. S'il l'a réussi, il réussit le second avec la probabilité 0,8 ; sinon, avec la probabilité 0,5.

- Construire l'arbre et calculer la probabilité de réussir les deux tirs, puis exactement un.
- Les deux tirs sont-ils indépendants ? Comparer avec le modèle où chaque tir est réussi avec la probabilité 0,7 indépendamment.

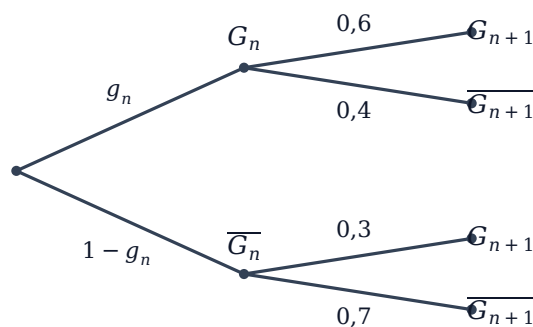


Deux lancers francs dépendants

Exercice 6 - Une suite de parties

Un joueur gagne la première partie avec la probabilité 0,5. Ensuite, s'il a gagné une partie, il gagne la suivante avec la probabilité 0,6 ; s'il l'a perdue, avec la probabilité 0,3. On note g_n la probabilité de gagner la n -ième partie.

- Montrer que $g_{n+1} = 0,3 g_n + 0,3$.
- Calculer g_2 et g_3 .
- Montrer que $v_n = g_n - \frac{3}{7}$ définit une suite géométrique, et en déduire la limite de (g_n) .



Passage de la partie n à la partie n + 1

Exercice 7 - Tirages avec remise

Une urne contient 3 boules rouges et 2 boules vertes. On tire successivement 3 boules **avec remise**.

- Pourquoi les tirages sont-ils indépendants ?

- b) Calculer la probabilité d'obtenir exactement 2 boules rouges.
- c) Calculer la probabilité d'obtenir au moins une boule verte.

Exercice 8 - Le premier six

On lance un dé équilibré jusqu'à obtenir un 6.

- a) Quelle est la probabilité que le premier 6 apparaisse au troisième lancer ?
- b) au k -ième lancer ?
- c) Quelle est la probabilité de devoir lancer le dé plus de 10 fois ?

Exercice 9 - Au moins deux six

On lance quatre fois un dé équilibré. Le joueur gagne s'il obtient au moins deux fois le 6.

Calculer la probabilité de gagner.

Exercice 10 - Probabilités totales puis répétition

Une usine a deux machines : A produit 70 % des pièces avec 2 % de défauts, B produit 30 % des pièces avec 5 % de défauts.

- a) Calculer la probabilité qu'une pièce prise au hasard soit défectueuse.
- b) Un client achète 3 pièces prises au hasard (indépendamment). Quelle est la probabilité qu'au moins une soit défectueuse ?

Exercice 11 - Une séance de tirs au but

Un attaquant marque un tir au but avec la probabilité 0,8, les tirs étant indépendants. Il en tire 5.

- a) Quelle est la probabilité qu'il les marque tous ?
- b) Quelle est la probabilité qu'il en marque au moins 4 ?

Exercice 12 - Le premier à faire six gagne

Alice et Bob lancent un dé à tour de rôle, Alice commençant. Le premier qui obtient un 6 gagne.

- a) Quelle est la probabilité qu'Alice gagne à son premier lancer ? à son deuxième lancer ?
- b) Montrer que la probabilité qu'Alice gagne à son $(k + 1)$ -ième lancer est $\left(\frac{25}{36}\right)^k \frac{1}{6}$.
- c) En déduire la probabilité qu'Alice gagne la partie.

Exercice 13 - Redondance d'un système

Un système critique repose sur des composants montés « en parallèle » : il fonctionne tant qu'au moins un composant fonctionne. Chaque composant fonctionne avec la probabilité 0,9, indépendamment des autres.

Combien de composants faut-il au minimum pour que le système fonctionne avec une probabilité d'au moins 0,999 ?

Exercice 14 – Retrouver la composition d’une urne

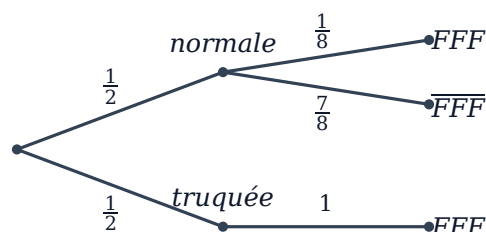
Une urne contient 2 boules rouges et n boules bleues ($n \geq 1$). On tire deux boules **avec remise**.

- a) Montrer que la probabilité d’obtenir deux boules de la même couleur vaut $\frac{4 + n^2}{(n + 2)^2}$.
- b) Déterminer n pour que cette probabilité vaille $\frac{5}{9}$.

Exercice 15 – Une pièce suspecte

Un sac contient deux pièces : une pièce normale et une pièce truquée qui tombe toujours sur « face ». On en prend une au hasard et on la lance trois fois : on obtient trois fois « face ».

- a) Calculer la probabilité d’obtenir trois « face » avec chaque pièce.
- b) Quelle est la probabilité que la pièce choisie soit la pièce truquée ?



Choix de la pièce puis trois lancers