Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : arbres, probabilités totales et dépistage

Probabilités conditionnelles et indépendance — Terminale spé maths

Exercices

Méthode

On traduit l'énoncé en **arbre pondéré**, on applique la **formule des probabilités totales** pour descendre l'arbre, puis on **renverse le conditionnement** pour les questions « sachant le résultat, quelle était la cause ? ».

Exercice 1 – Probabilité conditionnelle de base

On a $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}5$ et $P(A \cap B) = 0{,}2$. Calculer $P_B(A)$, $P_A(B)$ et dire si A et B sont indépendants.

Exercice 2 – Arbre à deux niveaux

Une urne U_1 contient 3 boules rouges et 2 vertes, une urne U_2 en contient 1 rouge et 4 vertes. On tire une urne au hasard (équiprobable), puis une boule. Quelle est la probabilité de tirer une rouge ?

Exercice 3 – Renversement du conditionnement

Dans la situation précédente, la boule tirée est rouge. Quelle est la probabilité qu'elle vienne de U_1 ?

Exercice 4 – Test de dépistage

Une maladie touche 2 % de la population. Un test est positif dans 95 % des cas chez un malade et dans 3 % des cas chez un non-malade. Un patient a un test positif : quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

Exercice 5 – Indépendance à vérifier

On lance deux dés équilibrés. Soient A « la somme vaut 7 » et B « le premier dé donne 3 ». Ces événements sont-ils indépendants ?

Exercice 6 – Au moins un succès

Un tireur atteint la cible avec la probabilité 0,3 à chaque tir, les tirs étant indépendants. Combien de tirs faut-il pour atteindre la cible au moins une fois avec une probabilité supérieure à 0,95 ?

Exercice 7 – Arbre à trois branches

Une usine a trois machines produisant respectivement 50 %, 30 % et 20 % des pièces, avec des taux de défaut de 1 %, 2 % et 5 %. Une pièce prise au hasard est défectueuse : de quelle machine vient-elle le plus probablement ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Tirages sans remise

Une urne contient 4 boules blanches et 6 noires. On tire deux boules **sans remise**. Calculer la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes.

Exercice 9 – Événements incompatibles ou indépendants

Soient A et B deux événements de probabilités 0,3 et 0,4. Peuvent-ils être à la fois incompatibles et indépendants ? Calculer $P(A \cup B)$ dans chacun des deux cas.

Exercice 10 – Probabilité d'une réunion conditionnelle

Dans une classe, 60 % des élèves font de l'anglais, 40 % de l'espagnol et 25 % les deux. Un élève fait de l'anglais : quelle est la probabilité qu'il fasse aussi de l'espagnol ? Quelle est la probabilité qu'un élève ne fasse aucune des deux langues ?

Exercice 11 – Chaîne de deux étapes

Un élève révise la veille d'un contrôle avec la probabilité 0,7. S'il a révisé, il réussit avec la probabilité 0,9 ; sinon avec la probabilité 0,3. Il a réussi : quelle est la probabilité qu'il ait révisé ?

Exercice 12 – Trois tirages indépendants

On lance trois fois une pièce truquée donnant « pile » avec la probabilité 0,6. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux piles, puis au moins deux piles.

Exercice 13 – Détermination d'un paramètre

Dans un lot, une proportion p de pièces est défectueuse. Un contrôle détecte 90 % des pièces défectueuses et rejette à tort 2 % des bonnes. Sachant que 4 % des pièces sont rejetées, déterminer p.

Exercice 14 – Indépendance de trois événements

Trois composants d'un circuit fonctionnent indépendamment avec les probabilités 0,9, 0,95 et 0,8. Calculer la probabilité que le circuit fonctionne s'ils sont montés en **série**, puis en **parallèle**.

Exercice 15 – Probabilités conditionnelles et effectifs

Sur 200 élèves, 120 sont des filles ; 80 élèves pratiquent un sport en club, dont 45 filles. Un élève est choisi au hasard.

a) Calculer la probabilité qu'il pratique un sport sachant que c'est une fille.

b) Les événements « être une fille » et « pratiquer un sport » sont-ils indépendants ?

Exercice 16 – Synthèse : maladie et double test

Une maladie touche 1 % d'une population. Un test a une sensibilité de 98 % et une spécificité de 96 %.

a) Calculer la probabilité qu'un test soit positif.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Calculer la valeur prédictive positive.

c) Un second test indépendant est pratiqué sur les positifs du premier. Calculer la probabilité d’être malade après **deux** tests positifs.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).