

Plaquette 5 - Problèmes de synthèse : arbres, probabilités totales et dépistage

Probabilités conditionnelles et indépendance — Terminale spé maths

Exercices

Méthode

On traduit l'énoncé en **arbre pondéré**, on applique la **formule des probabilités totales** pour descendre l'arbre, puis on **renverse le conditionnement** pour les questions « sachant le résultat, quelle était la cause ? ».

Exercice 1 - Probabilité conditionnelle de base

On a $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,5$ et $P(A \cap B) = 0,2$. Calculer $P_B(A)$, $P_A(B)$ et dire si A et B sont indépendants.

Exercice 2 - Arbre à deux niveaux

Une urne U_1 contient 3 boules rouges et 2 vertes, une urne U_2 en contient 1 rouge et 4 vertes. On tire une urne au hasard (équiprobable), puis une boule. Quelle est la probabilité de tirer une rouge ?

Exercice 3 - Renversement du conditionnement

Dans la situation précédente, la boule tirée est rouge. Quelle est la probabilité qu'elle vienne de U_1 ?

Exercice 4 - Test de dépistage

Une maladie touche 2 % de la population. Un test est positif dans 95 % des cas chez un malade et dans 3 % des cas chez un non-malade. Un patient a un test positif : quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

Exercice 5 - Indépendance à vérifier

On lance deux dés équilibrés. Soient A « la somme vaut 7 » et B « le premier dé donne 3 ». Ces événements sont-ils indépendants ?

Exercice 6 - Au moins un succès

Un tireur atteint la cible avec la probabilité 0,3 à chaque tir, les tirs étant indépendants. Combien de tirs faut-il pour atteindre la cible au moins une fois avec une probabilité supérieure à 0,95 ?

Exercice 7 - Arbre à trois branches

Une usine a trois machines produisant respectivement 50 %, 30 % et 20 % des pièces, avec des taux de défaut de 1 %, 2 % et 5 %. Une pièce prise au hasard est défectueuse : de quelle machine vient-elle le plus probablement ?

Exercice 8 - Tirages sans remise

Une urne contient 4 boules blanches et 6 noires. On tire deux boules **sans remise**. Calculer la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes.

Exercice 9 - Événements incompatibles ou indépendants

Soient A et B deux événements de probabilités 0,3 et 0,4. Peuvent-ils être à la fois incompatibles et indépendants ? Calculer $P(A \cup B)$ dans chacun des deux cas.

Exercice 10 - Probabilité d'une réunion conditionnelle

Dans une classe, 60 % des élèves font de l'anglais, 40 % de l'espagnol et 25 % les deux. Un élève fait de l'anglais : quelle est la probabilité qu'il fasse aussi de l'espagnol ? Quelle est la probabilité qu'un élève ne fasse aucune des deux langues ?

Exercice 11 - Chaîne de deux étapes

Un élève révise la veille d'un contrôle avec la probabilité 0,7. S'il a révisé, il réussit avec la probabilité 0,9 ; sinon avec la probabilité 0,3. Il a réussi : quelle est la probabilité qu'il ait révisé ?

Exercice 12 - Trois tirages indépendants

On lance trois fois une pièce truquée donnant « pile » avec la probabilité 0,6. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux piles, puis au moins deux piles.

Exercice 13 - Détermination d'un paramètre

Dans un lot, une proportion p de pièces est défectueuse. Un contrôle détecte 90 % des pièces défectueuses et rejette à tort 2 % des bonnes. Sachant que 4 % des pièces sont rejetées, déterminer p .

Exercice 14 - Indépendance de trois événements

Trois composants d'un circuit fonctionnent indépendamment avec les probabilités 0,9, 0,95 et 0,8. Calculer la probabilité que le circuit fonctionne s'ils sont montés en **série**, puis en **parallèle**.

Exercice 15 - Probabilités conditionnelles et effectifs

Sur 200 élèves, 120 sont des filles ; 80 élèves pratiquent un sport en club, dont 45 filles. Un élève est choisi au hasard.

- Calculer la probabilité qu'il pratique un sport sachant que c'est une fille.
- Les événements « être une fille » et « pratiquer un sport » sont-ils indépendants ?

Exercice 16 - Synthèse : maladie et double test

Une maladie touche 1 % d'une population. Un test a une sensibilité de 98 % et une spécificité de 96 %.

- Calculer la probabilité qu'un test soit positif.

- b) Calculer la valeur prédictive positive.
- c) Un second test indépendant est pratiqué sur les positifs du premier. Calculer la probabilité d'être malade après **deux** tests positifs.